

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

YVES MORCHOISNE



1^{ère} THÈSE : CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'ÉCROUISSAGE DES MATÉRIAUX MÉTALLIQUES.

2^e THÈSE : ONDES DE CHOC DANS LES MILIEUX ÉLASTO-PLASTIQUES.

Soutenues le 23 octobre 1969 devant la Commission d'examen.

MM. J. FRIEDEL

Président

R. MAZET

R. SIESTRUNCK

Examineurs.

O. N. E. R. A.

29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1969

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par
YVES MORCHOISNE



1^{ère} THÈSE : CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'ÉCROUISSAGE DES MATÉRIAUX
MÉTALLIQUES.

2^e THÈSE : ONDES DE CHOC DANS LES MILIEUX ÉLASTO-PLASTIQUES.

Soutenues le 23 octobre 1969 devant la Commission d'examen.

MM. J. FRIEDEL Président

R. MAZET

R. SIESTRUNCK

} Examineurs.

O. N. E. R. A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON
1969



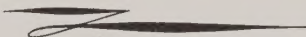
AVANT-PROPOS

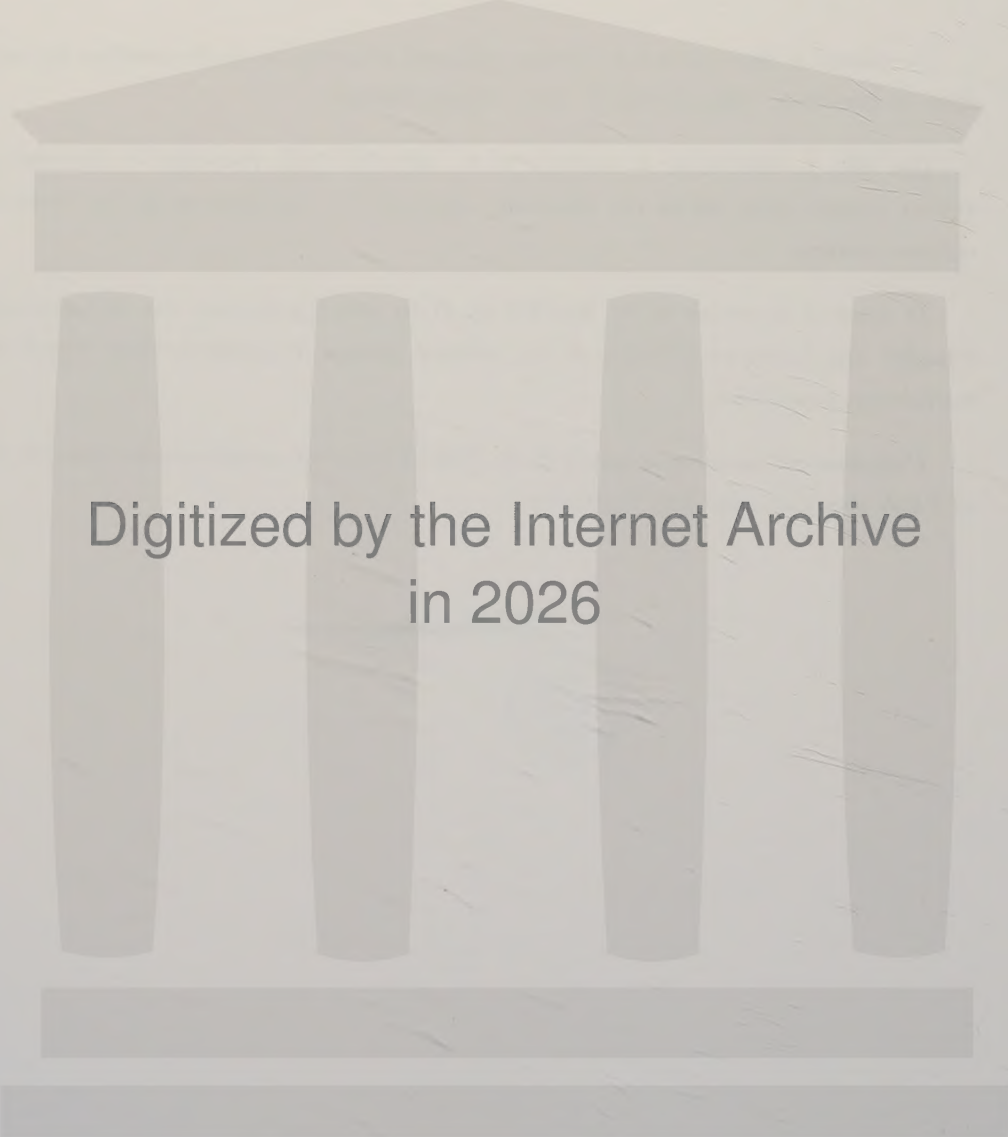
Ce travail a été effectué à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales dans la Direction "RÉSISTANCE DES STRUCTURES".

Que MM. J. FRIEDEL, R. MAZET et R. SIESTRUNCK, Président et Membres du Jury devant lequel cette thèse est soutenue, trouvent ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance.

Je tiens à remercier M. R. MAZET du profit que m'a procuré son enseignement à la Faculté des Sciences d'Orsay et de m'avoir permis de préparer cette thèse dans les meilleures conditions.

J'exprime ma reconnaissance à M. R. VALID et à ses collaborateurs pour les conseils et l'aide dont ils m'ont fait bénéficier.





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551521_0007

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
SOMMAIRE	2
I. INTRODUCTION	3
I,1. Présentation, intérêt du problème	3
I,2. Etat de la question	3
I,2.1. Les théories à critère unique	3
I,2.1.1. La théorie de l'écroutissage isotrope	3
I,2.1.2. La théorie de la translation de la surface limite	4
I,2.2. Les théories à critères multiples	4
I,2.2.1. La théorie des multiples potentiels de W.T. Koiter	4
I,2.2.2. Théorie de B. Nayroles	5
I,2.2.3. Théories associant un critère à chaque cristal	6
I,2.2.3.1. La théorie de Batdorf et Budiansky	6
I,2.2.3.2. Diverses améliorations et changements ont été proposés	7
I,3. Résumé des critiques des théories exposées	7
II. MÉTHODE DES CRITÈRES MULTIPLES LIÉS	7
II,1. Description de la méthode	8
II,2. Définition des fonctions caractéristiques	9
II,2.1. Propriétés de la surface limite	9
II,2.2. Particularisation de la fonction M	10
II,2.3. Définition de la fonction f , effet Bauschinger	11
II,2.4. Définition des fonctions l , effet latéral	13
II,3. Détermination des fonctions f , l^1 et l^2	14
II,3.1. Détermination de la fonction f	14
II,3.1.1. Cas $f(x, y) \times f(y, x) = 1$	15
II,3.1.2. Cas $f(x, y) = r(x) \times s(y)$	16
II,3.2. Détermination des fonctions l^1 et l^2	18
III. CALCUL DE LA DÉFORMATION	20
III,1. Principes du calcul	20
III,2. Fonction μ	20
IV. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX	22
IV,1. Matériaux	22
IV,2. Eprouvettes	22
IV,3. Déterminations partielles de (f , l , μ)	23
IV,3.1. Fonction f	23
IV,3.1.1. Courbes stabilisées	24
IV,3.1.2. Courbes trajectoires	24
IV,3.2. Fonction l	25
IV,3.3. Fonction $\mu(b, \tilde{b})$	26
IV,3.4. Propriétés de la surface limite	28
IV,4. Vérification globale (duralumin D26)	29
IV,4.1. Fonction $f(b, b_a)$	29
IV,4.2. Fonction $l^2(c, f(b'_a, b''))$	30
IV,4.3. Fonction $\mu(b, \tilde{b})$	33
IV,4.4. Calcul de la déformation	33
CONCLUSION	36
ANNEXE A	37
ANNEXE B	37
ANNEXE C - Calcul de la fonction $f(x, y)$	38
ANNEXE D - Conditions de régularité de la surface limite	39
ANNEXE E - Stabilisation des cycles	42
ANNEXE F - Extension au fluage	48
RÉFÉRENCES	51

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'ÉCROUISSAGE DES MATÉRIAUX MÉTALLIQUES

par YVES MORCHOISNE

RÉSUMÉ

Dans le cadre d'une théorie plastique des milieux continus, nous nous sommes fixés comme buts d'abord la prévision de l'évolution de la surface limite du domaine d'élasticité puis le calcul de la déformation.

Partant d'une représentation schématique du comportement à une échelle dite microscopique il a été trouvé, en postulant certaines indépendances, que la connaissance de deux fonctions pouvait suffire à décrire la variation de la surface limite. A l'aide de cette description il a été possible de proposer une expression de la déformation en fonction du trajet de chargement.

Chacune des trois fonctions caractérisant un matériau donné a été déterminée au moins une fois et des essais simples ont été proposés en vue de systématiser une telle détermination. La précision dans le calcul de la déformation a été calculée pour un cas de "traction-torsion".

La méthode de prévision proposée devrait permettre une adaptation du matériau à son utilisation ultérieure, question en liaison avec les problèmes du formage entre autres.

Descripteurs (thésaurus CÉDOCAR) : Formage matériaux - Métaux - Fluage - Déformation plastique - Chargement mécanique.

•

CONTRIBUTION TO THE STUDY OF COLD-DRAWING OF METALLIC MATERIALS

SUMMARY

Within the framework of a plastic theory of continuous media, this paper aims at foreseeing the limit surface evolution of the elasticity domain, then at calculating the deformation.

Starting from a schematic representation of the behaviour at a so-called microscopic scale it has been found, assuming some independances, that knowing two functions may be sufficient to describe the variation of the limit surface. With this description it has been possible to propose an expression of the deformation as a function of the loading history.

Each of the three functions characterizing a given material has been determined at least once, and simple tests are proposed to systematize such a determination. The computation accuracy of the deformation has been established in the "traction-torsion" case.

The proposed prevision method should permit to adapt the material to its ulterior use, a question linked, among others, to the problems of cold-drawing.

Descriptors (NASA thesaurus) : Cold drawing - Metal drawing - Cold working - Creep analysis - Plastic deformation - Loading rate.

I. INTRODUCTION

I.1. Présentation, intérêt du problème.

Lors de l'application de traitements mécaniques à un matériau à comportement plastique, application soit pendant l'usinage, soit au cours de l'utilisation proprement dite, l'expérience montre que la surface limite du domaine d'élasticité varie de manière nettement anisotrope (fig.1).

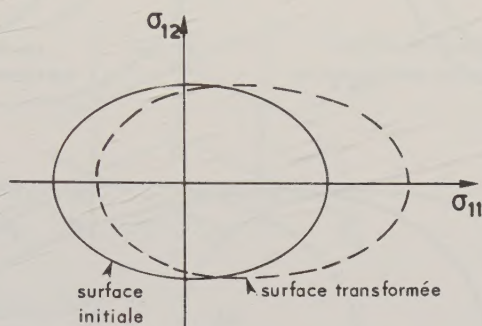


Fig. 1

Pour déterminer les possibilités d'emploi d'un tel matériau et, par un écrouissage, l'adapter dans une certaine mesure à son utilisation ultérieure, il est nécessaire de connaître au moins partiellement la surface limite et la façon dont elle évolue.

Pour pouvoir être utile, une théorie de l'écrouissage doit rendre compte, entre autres phénomènes, de :

- l'effet Bauschinger ("positif" ou "négatif")
- l'anisotropie engendrée : quand on entre dans le domaine plastique, il se crée une "bosse" sur la surface limite qui, initialement, peut être considérée comme symétrique et "régulière".

Mais la théorie devra être aussi utilisable : les caractéristiques concernant l'anisotropie de l'écrouissage devront, pour chaque matériau, pouvoir être déterminées par des essais simples (uniaxiaux et dans une seule direction si possible).

I.2. Etat de la question.

Nous allons passer en revue les principales théories en ne parlant, pour chacune, que des prévisions concernant la forme de la surface limite (dans l'espace des contraintes).

Toutes ces théories peuvent se répartir entre deux groupes : le groupe de celles qui considèrent la surface limite comme formant un tout se déplaçant et se déformant quand la contrainte varie et le groupe de celles pour lesquelles le critère général qui définit la surface résulte de la superposition d'un grand nombre de critères, qui généralement se déplaceront sans se déformer.

I.2.1. Les théories à critère unique.

I.2.1.1. La théorie de l'écrouissage isotrope.

Selon cette théorie, la surface limite reste toujours "homothétique" à la surface initiale (fig. 2).

L'équation de la surface s'écrit donc :

$$f(\sigma_{ij}) = k^2 \quad (k \text{ constant pour une surface donnée, dépend de l'écrouissage}),$$

(σ_{ij} tenseur des contraintes).

La fonction f est souvent prise répondant au critère de Von Mises [6]:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right\} + 3 \left\{ \sigma_{12} \sigma_{21} + \sigma_{13} \sigma_{31} + \sigma_{23} \sigma_{32} \right\} = k^2.$$

La théorie est en désaccord avec l'expérience, surtout pour les grands dépassements des contraintes limites initiales [1, 2], (planches n° 14 et 15), (fig. 3).

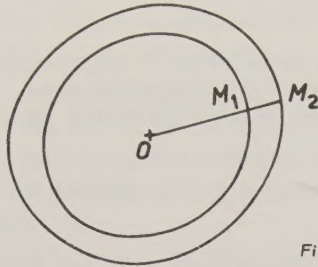


Fig. 2

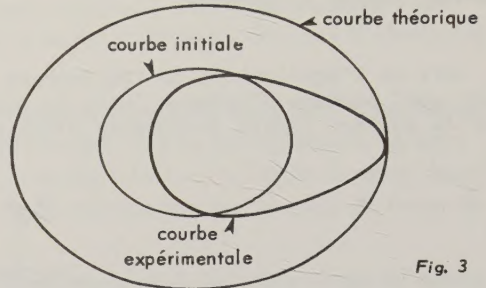


Fig. 3

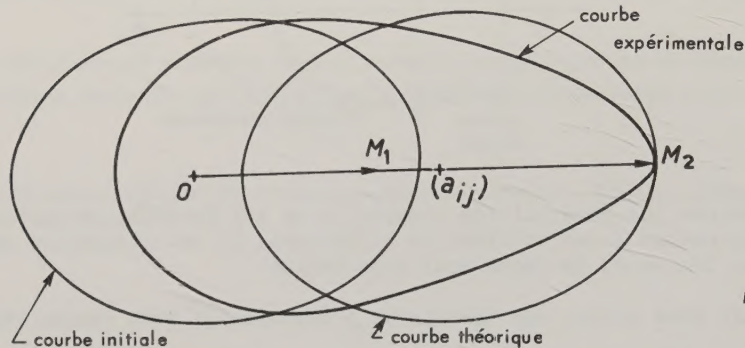


Fig. 4

1,2.1.2. La théorie de la translation de la surface limite.

La surface limite est supposée ici se translater sans se déformer ; on a donc, [3], [4], (fig. 4):

$$f(\sigma_{ij} - a_{ij}) = k^2$$

k constante, a_{ij} translation du centre.

L'effet Bauschinger est ici beaucoup trop important et l'on ne rend pas compte de la formation de la "bosse".

Il est possible de combiner ces deux théories en écrivant [5]:

$$f(\sigma_{ij} - a_{ij}) = k^2$$

a_{ij} translation, k fonction de l'écroutissage (constante pour une surface donnée).

Par une translation ou une "homothétie" on ne peut rendre compte de la déformation de la surface limite. Au lieu de chercher à rendre plus générales les déformations possibles d'un critère unique, il est alors au moins aussi simple de considérer des critères multiples, chacun d'entre eux ne pouvant que se translater (ou peut-être pour certaines théories, [17], se déformer par "homothétie").

1,2.2. Les théories à critères multiples.

1,2.2.1. La théorie des multiples potentiels de W.T. Koiter.[7] [15].

La surface limite est prise comme "enveloppe" d'un certain nombre de surfaces régulières, d'équation :

$$f_r(\sigma_{ij}) = k^2$$

k fonction de l'écroutissage du critère.

La déformation plastique est alors :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sum_{r=1}^n c_r h_r \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f}_r$$

où h_r est une fonction positive de la contrainte et de l'histoire de la déformation ;

où c_r est égale à zéro si $f_r < k^2$ ou $f_r = k^2$ et $\dot{f}_r < 0$

égale à un si $f_r = k^2$ et $\dot{f}_r > 0$.

Les critères ont été pris linéaires dans une application théorique faite par P.G. Hodge [15], (fig. 5).

Pour obtenir une représentation correcte de la réalité, il faudrait prendre un nombre infini de critères, ce qui, si ces critères sont dépendants, permet d'éviter la formation d'un "coin" sur la surface limite.

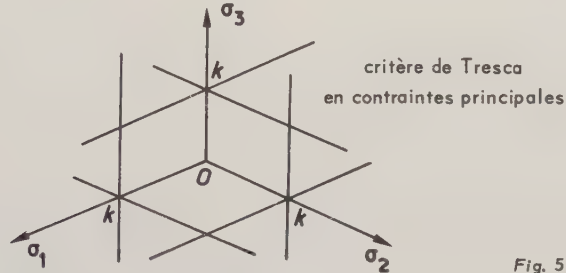


Fig. 5

1.2.2.2. Théorie de B. Nayroles [17].

Considérant l'élément de volume comme une "gerbe" (généralisation du montage en parallèles) de modèles élasto-plastiques, B. Nayroles peut décrire, avec plus ou moins de précision selon les modèles choisis et le nombre de "paramètres locaux", l'évolution de la surface limite dans l'espace des déformations.

En prenant, par exemple (fig. 6), des modèles de Saint-Venant, tous identiques, et un paramètre local, il obtient des résultats comparables à ceux de Batdorf et Budiansky [8], (fig. 8, 9 et 10), (fig. 12).

Pour un modèle, il n'y a pas d'écrouissage en contraintes (fig. 7).

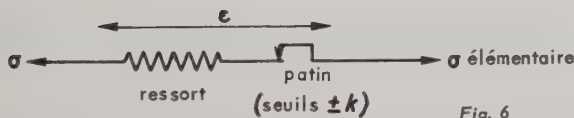


Fig. 6

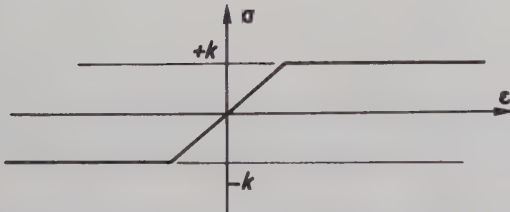


Fig. 7

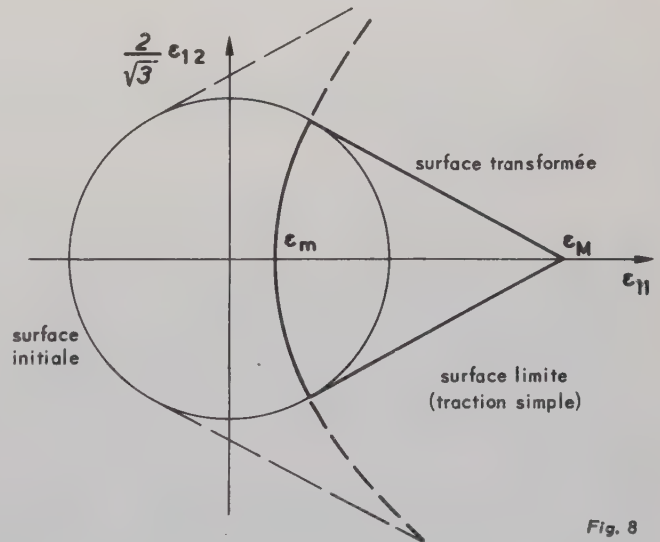


Fig. 8

Dans l'espace des déformations, les différents critères sont les "droites" tangentes à la surface limite ; chaque critère se déplace parallèlement à lui-même et est entraîné par le point représentatif de la déformation.

Si l'on prend comme critère initial celui de Von Mises (en traction-torsion)

$$\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2 = k^2 \longrightarrow \text{si } \nu = \frac{1}{2} \quad 3\varepsilon_{11}^2 + 4\varepsilon_{12}^2 = e^2.$$

On a : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$ avec $\sigma_{ij} = \mathcal{L}_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e$

donc : $\sigma_{ij} = \mathcal{L}_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p)$.

Pour une surface limite donnée, on a un état d'écrouissage : donc lorsque dans un état écroui le point représentatif des déformations (et des contraintes) décrit la surface limite dans l'espace des ε respectivement des σ , ε_{kl}^p reste constant.

En particulier, pour une traction-allongement simple :

$$\sigma_{11} = \mathcal{L}_{11kk} \varepsilon_{kk} - \mathcal{L}_{11kk} \varepsilon_{kk}^p$$

$$\sigma_{11} = \mathcal{L}'_{1111} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^p)$$

$$\sigma_{11} = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^p) E$$

et $\sigma_{12} = \mu \varepsilon_{12}$.

A des affinités près, la surface limite, dans l'espace des contraintes, est translatée de la surface limite en déformations (fig. 10).

Il faut trouver la valeur de la translation, c'est-à-dire de ε_{11}^p . ε_{11}^p est fournie par la courbe d'écrouissage (fig. 9).

En portant sur l'axe horizontal σ_{11} et sur l'axe vertical $\sqrt{3} \sigma_{12}$ on se ramène à une courbe initiale circulaire (fig. 10).

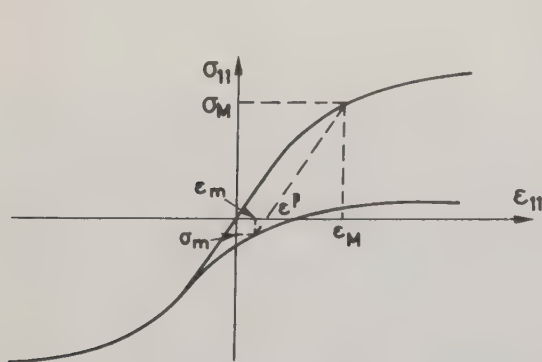


Fig. 9

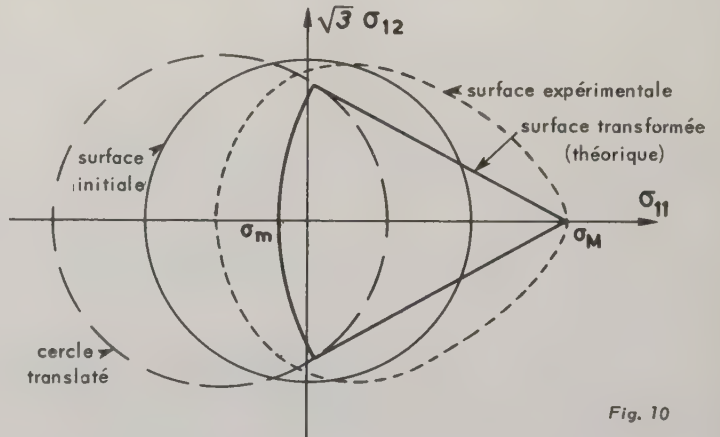


Fig. 10

Ce modèle donne des résultats assez éloignés de la réalité ; l'auteur suggère qu'un recours à des modèles plus complexes ou mieux choisis pourrait donner une représentation plus correcte des faits expérimentaux.

1.2.2.3. Théories associant un critère à chaque cristal.

L'une des tendances actuelles est celle qui consiste à essayer de relier le comportement de l'agrégat polycristallin que constitue le matériau métallique au comportement du cristal élémentaire.

1.2.2.3.1. La théorie de Batdorf et Budiansky [8].

Le comportement du cristal est dans cette théorie, la première de la tendance, assez simplifié.

Il est postulé que pour chaque cristal il n'y a qu'une seule direction de plan de glissement, que le glissement dans ce plan et le long d'une direction donnée n'est fonction que de la composante du cisaillement sur cette direction (fig. 11).

$$|\vec{g}| = F(|\vec{x}| \cos \theta).$$

A chaque cristal est alors associé un critère, "réunion des critères associés à chaque direction du plan".

Pour une direction, on a en effet :

$$F(u) = 0 \text{ si } u < \ell$$

(u dépendant linéairement du tenseur σ).

En passant maintenant à une répartition continue et aléatoire des plans de glissement, on obtient la déformation totale en ajoutant tous les glissements élémentaires.

Le critère élémentaire est $|\vec{X}| \cos \theta < \ell$ et il est facile de calculer, pour un plan fixé et une direction, la valeur de $|\vec{X}| \cos \theta$ en fonction de σ .

La surface limite est l'enveloppe de ces critères "linéaires", (fig. 12).

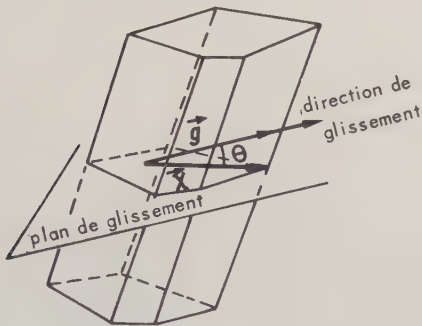


Fig. 11

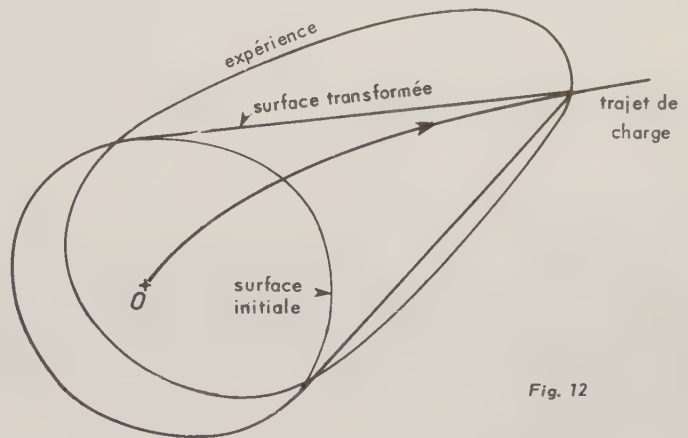


Fig. 12

Les différents critères étant "indépendants", il se forme un coin au point de la surface limite représentant l'état de contrainte, alors que l'expérience donne une bosse qui n'est même pas toujours "autour" du point représentatif [1], (fig. 12).

Sur la critique de cette théorie, voir aussi [18].

1.2.2.3.2. Diverses améliorations et changements ont été proposés.

L'une d'entre ces "améliorations" consiste à supposer que le tenseur $\mathcal{E}$ est le même pour chaque cristal, et non le tenseur σ . En fait, [21], ces deux hypothèses semblent fausses.

On considère aussi, pour un cristal, différents plans de glissement et une loi plus complexe.

T.H. Lin [9], considère dans chaque plan de glissement trois directions de glissement et suppose que le cisaillement est fonction de la somme de ces trois glissements:

$$\tau = f(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3).$$

Comme on peut donc s'en rendre compte, les lois de comportement deviennent de plus en plus complexes au fur et à mesure que les études sur les monocristaux progressent.

1.3. Résumé des critiques des théories exposées.

Il est possible que, par une complication des théories, on puisse arriver à une représentation extrêmement correcte de la réalité, bien que l'on semble en être actuellement assez éloigné. Les principales méthodes pour la détermination théorique de la surface limite nous semblent donc insuffisantes ou trop complexes et la recherche directe de lois, même approchées, mais facilement utilisables, semble devoir être intéressante, dans la mesure où ces lois seront physiquement justifiables.

II. MÉTHODE DES CRITÈRES MULTIPLES LIÉS

Nous ne parlerons ici que de phénomènes locaux : les différents champs de tenseurs d'ordre zéro, un ou deux utilisés, ne concerneront que l'élément de volume, soit à une échelle macroscopique, soit à une échelle plus fine, dite "microscopique".

Dans le cas généralement considéré où la densité volumique de moment des forces appliquées est nulle, la contrainte est un élément d'un espace vectoriel à six dimensions. Si l'on admet, de

plus, que la contrainte moyenne, partie sphérique du tenseur des contraintes, n'a aucune influence sur les phénomènes de plasticité, l'étude de la surface limite peut être faite dans un espace à cinq dimensions.

Pour pouvoir étendre la méthode proposée au cas général, il nous a semblé préférable de se servir de l'espace à neuf dimensions des contraintes. Dans cet espace, le produit scalaire utilisé sera le suivant :

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_{ij} q_{ij} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2 \text{ ou } 3 \\ j = 1, 2 \text{ ou } 3 \end{matrix} \right) \quad p_{ij} \text{ et } q_{ij}$$

étant les composantes des vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$.

II.1. Description de la méthode.

Il semble qu'une représentation même schématique des lois de comportement "microscopique" fournisse certains critères que le modèle mathématique choisi pour simuler les réactions du métal aux sollicitations mécaniques devra vérifier. Il paraît cependant probable que pour passer de ces lois aux lois de comportement macroscopique, il faudra recourir à un certain nombre d'hypothèses, simplificatrices entre autres, hypothèses non déduites automatiquement de la connaissance du comportement microscopique.

Nous allons donc considérer le métal à l'échelle macroscopique comme un assemblage de modèles microscopiques. Chaque modèle sera constitué par un couple de deux vecteurs unitaires orthogonaux, le premier normal à un plan de glissement, le second définissant dans ce plan la direction de glissement (donc pouvant prendre deux valeurs opposées selon le sens du glissement $\vec{n}^2$ et $-\vec{n}^2$). Chaque modèle sera en outre repéré par une variable de position π définissant la zone du matériau qu'il occupe. Par exemple $\pi = X$, X ensemble des trois coordonnées de Lagrange du point moyen du modèle.

$$\vec{n}^1 = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{n}^2 = \begin{pmatrix} -\sin \psi \cos \varphi \cos \theta - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \varphi \sin \psi \cos \theta + \cos \psi \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \psi \end{pmatrix}$$

avec : $n_i^1 n_i^1 = 1 = n_i^2 n_i^2 \quad n_i^1 n_i^2 = 0 \quad (\text{fig. 13})$

soit : $\bar{p}_{ij} = n_i^1 n_j^2 \quad \text{alors} \quad p_{ii} = 0$

et $p_{ij} p_{ij} = 1 \quad (\bar{p}_{ji} = p_{ij})$

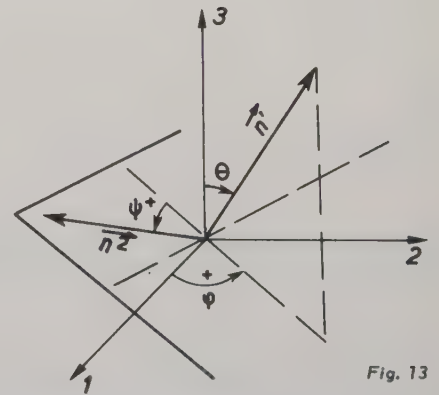


Fig. 13

$\vec{p}$ peut donc être considéré comme un vecteur (à 9 dimensions) unitaire et "déviateur" et à une position π (une valeur de π) correspond deux valeurs possibles de $\vec{p}$: $\vec{p}$ et $-\vec{p}$ ($\vec{p}$ étant défini au signe près).

En supposant qu'il existe dans la zone (définie par π) une contrainte uniforme microscopique $\vec{\sigma}_\pi$, la composante χ_π , sur l'axe $\vec{n}^2$, du cisaillement dans le plan orthogonal à $\vec{n}^1$ est :

$$\chi_\pi = n_i^2 \sigma_{\pi ij} n_j^1 = p_{ij} \sigma_{\pi ij} = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}_\pi$$

Si, par exemple, X n'est pas fonction de π et si la contrainte $\vec{\sigma}_\pi$ est, quel que soit π , égale à la contrainte macroscopique locale $\vec{\sigma}$, on a alors : $\chi = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$ et lorsque θ , φ et ψ balaient leurs domaines de valeurs, la surface limite obtenue est celle qui correspond au critère de Tresca.

Dans la suite de l'exposé, nous prendrons une répartition des contraintes homogène et de degré un en $\vec{\sigma}$. Ainsi la contrainte microscopique $\vec{\sigma}_\pi$ sera reliée à la contrainte macroscopique $\vec{\sigma}$ par une relation du type : $\vec{\sigma}_\pi = A_\pi \vec{\sigma}$ (A_π d'ordre 2 dans l'espace à 9 dimensions),

A étant fonction de π , de l'écrouissage (paramètre $\bar{\epsilon}$) et de la direction de chargement

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\epsilon}}$$

On a donc :

$$\chi_{\pi} = \vec{p} \cdot (A_{\pi} \vec{\sigma})$$

soit en posant $\vec{M}_{(\pi, p)} = \bar{A}_{\pi} \vec{p}$ ($\bar{A}_{\pi}$ = transposé de A_{π}) $\chi_{\pi} = \vec{M}_{(\pi, p)} \cdot \vec{\sigma}$

$\vec{p}$ étant donné, au signe près, lorsque π est connu M est donc, au signe près, fonction de π , $\mathbb{E}$ et $\vec{\sigma}/|\vec{\sigma}|$ (en fait, seul $\vec{\sigma}/|\vec{\sigma}|$, s_{ij} = déviateur de σ_{ij} , si la partie sphérique de $\vec{\sigma}$ a une influence nulle, intervient).

Soient χ' et χ'_a (nombres positifs) les valeurs des cisaillements limites, du modèle de position π' , dans les "directions" $\vec{p}'$ et $-\vec{p}'$. Le modèle sera sans glissement pour une contrainte $\vec{\sigma}$ si :

$$\begin{cases} \vec{M}_{(\pi', \vec{p}')} \cdot \vec{\sigma} < \chi' \\ \vec{M}_{(\pi', -\vec{p}')} \cdot \vec{\sigma} < \chi'_a \end{cases} \quad M, \chi', \chi'_a \text{ fonction de } \mathbb{E}$$

Le domaine élastique sera, pour un état donné du matériau, constitué par l'ensemble des $\vec{\sigma}$ vérifiant ces deux inégalités quel que soit π appartenant à l'ensemble des positions.

Il est donc nécessaire, pour déterminer la surface limite du domaine élastique et son évolution au cours d'un chargement, de connaître les valeurs successives des cisaillements limites des modèles microscopiques.

II,2. Définition des fonctions caractéristiques.

II,2.1. Propriétés de la surface limite.

Avant de définir les deux fonctions qui nous serviront à décrire l'évolution de la surface limite, il nous est nécessaire de rappeler ses principales propriétés admises soit par suite des justifications théoriques, soit par suite des vérifications expérimentales.

A) - La surface sera prise convexe ([10, 11, 12] et [1, 2, 13]) et régulière ([2, 14]).

B) - Nous supposons nulle l'influence de la contrainte moyenne, la surface limite sera alors un cylindre à génératrices parallèles à la direction $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$ dans l'espace à neuf dimensions des contraintes.

C) - La surface limite du matériau non écroui répondra au critère de Von Mises

$$s_{ij} s_{ij} = \frac{2}{3} k^2 \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

D) - Tous les chargements simples sont équivalents et vérifient les lois de Hencky (chargement sans retour en arrière).

De la convexité et de la régularité, on déduit que :

- en tout point de la surface limite, il existe un plan tangent et un seul,
- tout plan tangent est parallèle à un et à un seul autre plan tangent.

Pour vérifier la propriété (B) nous imposerons aux vecteurs M d'être des déviateurs.

Pour vérifier la propriété (C), les vecteurs $\vec{M}$, pour un écrouissage nul ($\mathbb{E} = 0$), décriront l'ensemble des vecteurs déviateurs unitaires de l'espace à neuf dimensions des contraintes (si pour $\mathbb{E} = 0$ on avait $M_{(\pi, \vec{p})} = \vec{p} \in$ sous-ensemble de l'ensemble des vecteurs déviateurs unitaires, alors la surface limite initiale serait celle répondant au critère de Tresca, voir figures 14, 15).

$$\chi_0 = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$$

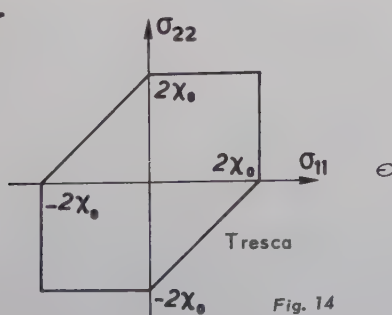


Fig. 14

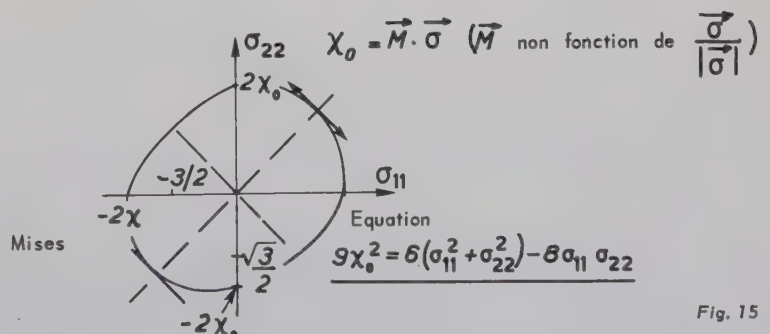


Fig. 15

Pour vérifier la propriété (D), et en bonne concordance avec les expériences [11] et [2], la surface limite sera supposée être (dans l'espace des déviateurs, norme $\sqrt{s_{ij} s_{ij}}$) de révolution autour de l'axe lors d'un chargement simple (avec ou sans retour en arrière) à partir d'un état non écroui.

11.2.2. Particularisation de la fonction $\vec{M}$.

Nous allons maintenant prendre pour la fonction vectorielle $\vec{M}$ une forme particulière qui ramènera le problème de la détermination des évolutions de la surface limite au problème de la détermination de deux fonctions à valeurs scalaires.

Pour une position π' et un vecteur $\vec{p}'$ (donné au sens près quand π' est connue) nous supposons $\vec{M}$ de direction fixe au cours de l'écrouissage et nous poserons :

$$\vec{M}(\pi', \mathbb{E}, \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}) = \vec{n}_{(\pi')} \cdot g(\pi', \vec{p}', \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}, \mathbb{E}) \quad \text{avec} \quad g(\vec{p}') = -g(-\vec{p}')$$

$\vec{n}_{(\pi')}$ vecteur unitaire déviateur = $\vec{n}$, g déterminé au signe près, (la variation de $\vec{n}(\pi')$ en fonction de $\mathbb{E}$ est négligée).

Chaque ensemble $(\pi', \vec{p}')$ définit une surface limite élémentaire $\Sigma(\pi', \vec{p}')$, frontière du domaine défini par l'ensemble des $\vec{\sigma}$ tels que

$$\vec{n}_{(\pi')} \cdot g(\pi', \vec{p}', \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}, \mathbb{E}) \cdot \vec{\sigma} < \chi'$$

(à $\pi', \vec{p}', \mathbb{E}$ constants).

La surface limite globale $S(t)$ est alors l'enveloppe d'une partie au moins de ces surfaces (le domaine élastique est l'intersection de tous les domaines élémentaires).

Soit $\vec{\sigma}'$ un point de $S(t)$, il existe un couple $(\pi', \vec{p}')$ tel que $\vec{\sigma}' \in \Sigma(\pi', \vec{p}')$. Cette surface a pour équation ($\vec{\sigma}'$ fixé, $\vec{\sigma}$ variable) :

$$\vec{\sigma}' \cdot \vec{n}_{(\pi')} g(\pi', \vec{p}', \frac{\vec{s}'}{|\vec{s}'|}, \mathbb{E}) = \chi' = \vec{\sigma}' \cdot \vec{n}_{(\pi')} g(\pi', \vec{p}', \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}, \mathbb{E}).$$

La normale $\vec{m}'$ à $S(t)$ (donc à $\Sigma(\pi', \vec{p}')$) en $\vec{\sigma}'$ est (au signe près) :

$$\vec{m}' = \frac{\vec{n}_{(\pi')} g(\pi', \vec{p}', \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}, \mathbb{E}) + \vec{\sigma}' \cdot \vec{n}_{(\pi')} \frac{d\vec{g}}{d\vec{\sigma}}}{\left| \vec{n}_{(\pi')} g(\pi', \vec{p}', \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}, \mathbb{E}) + \vec{\sigma}' \cdot \vec{n}_{(\pi')} \frac{d\vec{g}}{d\vec{\sigma}} \right|}$$

Nous postulons que g n'est pas fonction de $\vec{\sigma}$, ce qui entraîne alors $\vec{m}' = \vec{n}_{(\pi')} \times \text{signe}(g)$

Prenons $g(\pi', \vec{p}', \mathbb{E}) > 0$, ce qui revient si g est négatif, à inverser le sens de $\vec{n}_{(\pi')}$, d'où : $\vec{m}' = \vec{n}_{(\pi')} = \vec{n}$ et $\Sigma(\pi', \vec{p}')$ est un plan (fig. 16).

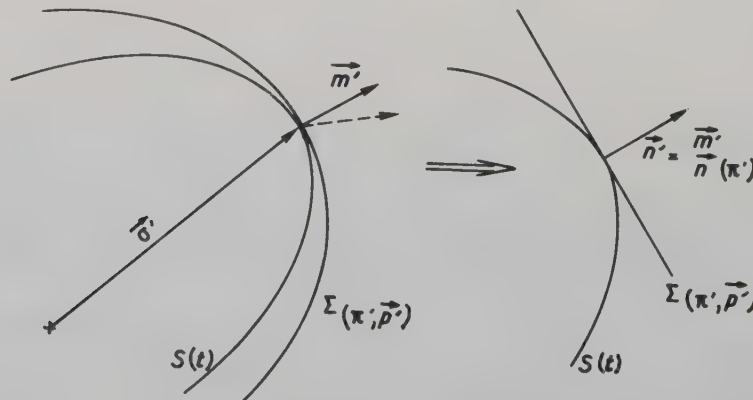


Fig. 16

Le cisaillement correspondant au couple $(\pi', \vec{p}')$ pour la contrainte $\vec{\sigma}'$ est :

$$\vec{\sigma}' \cdot \vec{n}' g(\pi', \vec{p}', \mathbb{E}).$$

Ce cisaillement est égal à χ' cisaillement limite lorsque $\vec{\sigma}'$ est sur $\Sigma(\pi', \vec{p}')$

$$\chi' = \vec{\sigma}' \cdot \vec{n}' g(\pi', \vec{p}', \mathbb{E}).$$

Posons : $\vec{\sigma}' \cdot \vec{n}' = h'$ alors : $h' = \chi' / g(\pi', \vec{p}', \mathbb{E})$.

Si nous définissons $\mathbb{E}$ comme l'ensemble des valeurs des cisaillements limites de tous les couples $(\pi, \vec{p})$, nous pouvons écrire :

$$h' = G(\pi', \vec{p}', \mathbb{E})$$

χ' étant fonction de π' , $\vec{p}'$ et $\mathbb{E}$ uniquement ($\mathbb{E}$ fonction de l'ensemble des valeurs de h).

II,2.3. Définition de la fonction f , effet Bauschinger.

Soit $\vec{n}$ la normale extérieure à la surface limite en $\vec{\sigma}$, soit $\vec{\sigma}_\alpha$ la contrainte, déterminée à une contrainte sphérique près, correspondant à la normale extérieure $-\vec{n}$.

$$\text{Posons : } h = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad h_\alpha = -\vec{\sigma}_\alpha \cdot \vec{n}.$$

Nous allons relier entre elles les variations des deux plans tangents parallèles en $\vec{\sigma}$ et $\vec{\sigma}_\alpha$, variations issues d'un accroissement $d\vec{\sigma}$ de $\vec{\sigma}$ qui entraîne une variation des divers χ' .

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \\ h \\ h_\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{\sigma} + d\vec{\sigma} \\ h + dh \\ h_\alpha + dh_\alpha \end{cases}$$

Pour chaque pas d'un chargement $\vec{\sigma}_{(t)}$ nous décomposerons le vecteur $d\vec{\sigma}$ en un vecteur parallèle à $\vec{n}$ et un vecteur tangent à la surface limite, soit

$$d\vec{\sigma} = \vec{n} d\chi + d_t \vec{\sigma}.$$

En linéarisant, nous voyons que les "effets" (variations de l'écoulement, de la déformation ...) dus à $d\vec{\sigma}$ sont la somme, au second ordre près, des "effets" dus à $\vec{n} \cdot d\chi$ et à $d_t \vec{\sigma}$.

Toujours au second ordre près et par suite de la définition de la surface limite $S_{(t)}$ les variations de l'écoulement plastique, de la surface $S_{(t)}$ et de la déformation plastique dues à $d_t \vec{\sigma}$ sont nulles (fig. 17).

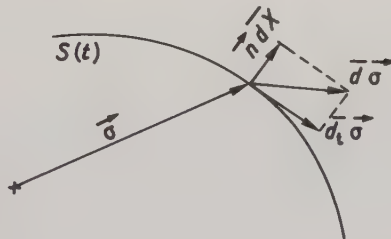


Fig. 17

Supposons $d\chi$ positif : $\vec{n} \cdot d\vec{\sigma} = d\chi > 0$, nous allons démontrer que, dans ce cas, nous avons $dh = d\chi$.

Démontrons tout d'abord que $\vec{\sigma} + d\vec{\sigma}$ est sur $S(t + dt)$.

$S_{(t)}$ surface limite du domaine élastique, $D_{(t)}$ ouvert convexe et "régulier"

$$S_{(t)} = \bar{D}_{(t)} - D_{(t)}$$

Soit, donné en fonction du temps t , un chemin de charge $[\vec{\sigma}_{(t)}, \vec{\sigma}_{(t+dt)}]$ linéaire, monotone et "croissant" ($\vec{n} \cdot (\vec{\sigma}_{(t+dt)} - \vec{\sigma}_{(t)}) > 0$), avec $\vec{\sigma}_{(t)} \in S_{(t)}$ alors, si $S_{(t)}$ est une fonction continue, à dérivée continue, $\vec{\sigma}_{(t+dt)} \in S_{(t+dt)}$:

Soit $\vec{\Sigma}_{(t')}$ l'intersection de $S_{(t')}$ avec le support de $[\vec{\sigma}_{(t)}, \vec{\sigma}_{(t+dt)}]$, obtenue par continuité à partir de $\vec{\Sigma}_{(t)} = \vec{\sigma}_{(t)}$ (fig. 18), ($t' \in [t, t+dt]$).

La dérivée de $\vec{\Sigma}_{(t')}$ est continue, elle est donc bornée sur $[t, t+dt]$ et il existe donc

$$k \text{ tel que } \left| \frac{d\vec{\Sigma}_{t'}}{d\vec{\sigma}_{t'}} \right| \leq k, \quad \forall t' \in [t, t+dt].$$

$$\text{Soit } y = \left| \vec{\Sigma}_{(t')} - \vec{\Sigma}_{(t)} \right| \quad \text{et} \quad x = \left| \vec{\sigma}_{(t')} - \vec{\sigma}_{(t)} \right|.$$

Nous avons $y = f(x)$ avec $f'(x) < k$ et $f'(x) = 0$ pour $y > x$ (par définition de $D(t')$).

Posons $u(x) = y - x$, $y' = u' + 1$, $u' = -1$ pour $u > 0$.

Donc pour $u > 0$ $u' < 0$.

S'il existe $x_0 : u(x_0) > 0$ alors il existe $x_1 : u(x_1) = 0$ et $u(x') > 0$ pour $x_1 < x' \leq x_0$ ($u(0) = 0$).

Alors en appliquant le théorème des accroissements finis à $[x_1, x_0]$ nous voyons qu'il existe $x'' \in]x_1, x_0[$ avec $u'(x'') > 0$ et $u(x'') > 0$, ce qui est impossible, donc $u(x) \leq 0$ $\forall x \in [0, |\vec{\sigma}_{(t+dt)} - \vec{\sigma}_{(t)}|]$, c'est-à-dire $y \leq x$ (fig. 19).

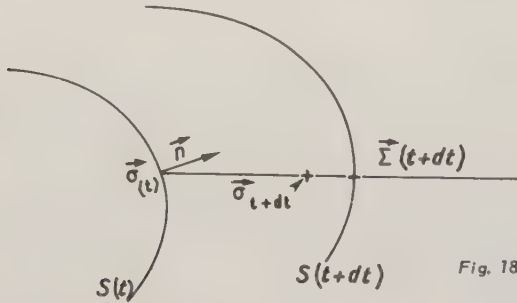


Fig. 18

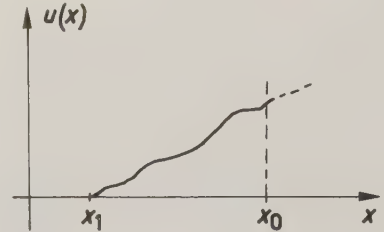


Fig. 19

Mais, par définition de $S(t)$, on doit avoir $y \geq x$.

Donc $y = x$, ce qui entraîne $\vec{\sigma}_{(t')} = \vec{\Sigma}_{(t')}$ quel que soit $t' \in [t, t + dt]$.

Le point $\vec{\sigma}_{(t+dt)}$ est sur la surface limite $S_{(t+dt)}$.

Démontrons maintenant que pour que ce résultat soit réalisé, au second ordre près, il est nécessaire que $\vec{dX} = \vec{dh}$ (nécessaire et suffisant).

Prenons comme système d'axes (x, y) la tangente et la normale à $S_{(t)}$ en $\vec{\sigma}_{(t)}$ (fig. 20).

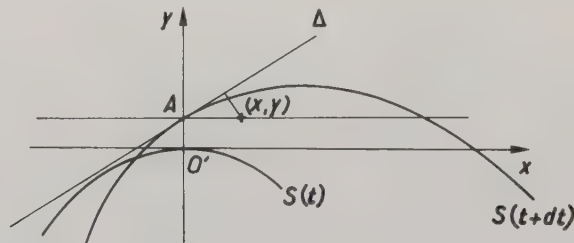


Fig. 20

Soit $f(x) = y$ l'équation de $S_{(t)}$ et $g(x) = y$ celle de $S_{(t+dt)}$.

Nous avons alors $f(0) = 0 = f'(0)$.

Soient x et y les coordonnées de $\vec{\sigma}_{(t+dt)}$.

$S_{(t+dt)}$ est indépendante de x , au second ordre près.

Pour $x = 0$, $\vec{\sigma}_{(t+dt)}$ doit être sur $S_{(t+dt)}$ d'où $y = g(0)$, Δ , la tangente en $A(0, g(0))$, a pour équation

$$y = g(0) + x g'(0).$$

La distance du point $(x, y = g(0))$ à $S_{(t+dt)}$ est, au second ordre près, égale à la distance de ce point à Δ soit :

$$\frac{|x g'(0)|}{\sqrt{1 + (g'(0))^2}}$$

ce qui impose $g'(0) = 0$ ($g(0)$) donc $\vec{dX} = \vec{dh}$ (au second ordre près).

$$(g'(0) = \alpha_1, g(0) + \alpha_2 g(0)^2 + \alpha_3 x g(0) + \dots = 0(g(0))).$$

A chaque pas de chargement, nous avons donc :

$$\text{soit } \bar{d}h = 0 \quad \text{si } \bar{d}X < 0$$

$$\text{soit } \bar{d}h = \bar{d}X \quad \text{si } \bar{d}X \geq 0$$

$$\text{c'est-à-dire : } \bar{d}h = \sup(0, \vec{n} \cdot \bar{d}\vec{\sigma}).$$

Comme $\bar{d}E = K(\pi, \vec{p}, E) \bar{d}h$ (ce qui se déduit de la non-influence de $\bar{d}_t \vec{\sigma}$) et que $\bar{d}h_a = \frac{\partial \bar{F}}{\partial E}(\pi, \vec{p}, E) \bar{d}E$ (d'après la définition même de E), alors :

$$\bar{d}h_a = \bar{d}h \bar{f}(\pi, \vec{p}, E).$$

Nous allons maintenant supposer que, pour la position π et le critère associé (critère privilégié au temps t pour le chargement $\vec{\sigma}(t)$ fixé) la fonction $\bar{f}$ ne dépend que de quantités pouvant être considérées comme caractéristiques d'un écrouissage local, à savoir les distances h et h_a .

$$\bar{d}h_a = f(h, h_a) \bar{d}h$$

avec :

$$\bar{d}h = \sup(0, \vec{n} \cdot \bar{d}\vec{\sigma}).$$

II.2.4. Définition des fonctions ℓ , effet latéral.

La surface limite sera, en définitive, considérée comme enveloppe de ses plans tangents (à chacun des couples de plans tangents parallèles sera associé, lorsque nous envisagerons le calcul de la déformation plastique, un potentiel de déformation).

En supposant que, lors d'un écrouissage, ces plans se déplacent sans se déformer et parallèlement à eux-mêmes, nous venons de déterminer la relation existant entre les déplacements de deux plans parallèles particuliers. Il reste donc à déterminer l'effet du déplacement du plan tangent à la surface limite, au point d'application de la contrainte, sur le déplacement d'un plan quelconque.

De la même façon qu'au paragraphe précédent, nous pouvons écrire la relation générale reliant la variation de h' , "tangente correspondant au couple π' , $\vec{p}'$ ", à la variation de h (tangente en $\vec{\sigma}$) :

$$\bar{d}h' = \bar{\ell}(\pi, \vec{p}, \pi', \vec{p}', E) \bar{d}h \quad \begin{aligned} h' &= \vec{n}' \cdot \vec{\sigma} \\ h'_a &= \vec{n}' \cdot \vec{\sigma}'_a. \end{aligned}$$

Nous postulons aussi que $\bar{\ell}$ n'est fonction que de quantités locales relatives aux couples $(\pi, \vec{p})$ et $(\pi', \vec{p}')$ à savoir (h, h_a) et (h', h'_a) et d'une quantité caractérisant l'"écart" de ces deux couples, à savoir l'angle non orienté c défini par $\cos c = \vec{n} \cdot \vec{n}'$, $\vec{n}'$ normale unitaire orientée relative à π' , $\vec{p}'$ (fig. 21) : (voir annexe A au sujet d'une justification a posteriori de cette hypothèse).

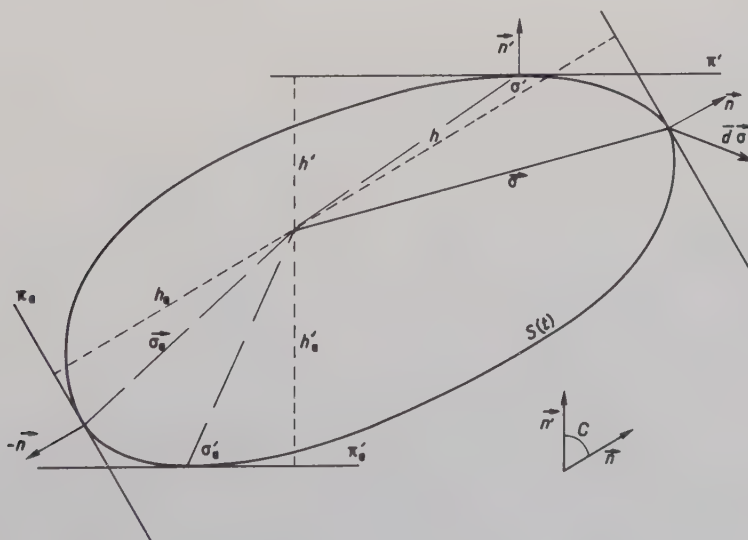


Fig. 21

$$\bar{d}h' = \bar{\ell}(h, h_a, h', h'_a, c) \bar{d}h$$

$\bar{\ell}$ est paire et de période 2π par rapport à c ($\bar{\ell}$ fonction de c par l'intermédiaire de $\cos c$).

Deux formes seulement de cette relation seront envisagées :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{d}h' = \ell^{\bar{1}}(h, c) \bar{d}h & c \leq \pi/2 \quad \ell^{\bar{1}}(h, 0) = 1 \\ \bar{d}h'_a = f(h', h'_a) \bar{d}h' & \ell^{\bar{1}} \text{ paire en } c \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{d}h' = \ell^{\bar{2}}(f(h'_a, h'), c) \bar{d}h & c \text{ quelconque, } \ell^{\bar{2}} \text{ paire en } c \\ \text{avec } \ell^{\bar{2}}(f, 0) = 1 \quad \text{et} \quad \ell^{\bar{2}}(f, \pi) = f. \end{array} \right.$$

Dans le cas d'un chargement simple, sans retour en arrière ($\vec{\sigma}_{(t)} = \vec{\sigma}_0 \cdot \lambda(t)$, $\lambda(t)$ monotone, positive, croissante), ces deux formes se différencient, surtout à cause des conditions de raccordement, en $c = \pi/2$, qu'il est nécessaire de vérifier pour la première forme. Des expériences relativement simples permettront donc de faire un choix entre les deux solutions proposées (annexe D).

La première de ces solutions, qui postule que la relation reste vraie pour tout couple $(\pi', \pm \vec{p}')$, ne décrivait qu'assez mal le comportement du matériau qui fit l'objet d'une vérification globale.

Les fonctions $\ell^{\bar{1}}$ (ou $\ell^{\bar{2}}$) et f devront, afin que la surface limite reste convexe et régulière, remplir certaines conditions (annexe D).

II,3. Détermination des fonctions f , $\ell^{\bar{1}}$ et $\ell^{\bar{2}}$.

II,3.1. Détermination de la fonction f .

La fonction de deux variables $f = f(h, h_a)$ sera déterminée par un essai de chargement simple avec retours en arrière.

Pour un chargement de ce type, nous avons à chaque instant :

$$\vec{\sigma}_{(t)} = \lambda(t) \vec{\sigma}_0 \longrightarrow \vec{s}(t) = \lambda(t) \vec{s}_0$$

$\lambda(t)$ fonction scalaire, $\vec{s}_{(t)}$ déviateur de $\vec{\sigma}_{(t)}$ et $\vec{s}_0$ déviateur de $\vec{\sigma}_0$

et $\vec{n}_{(t)} = \pm \frac{\vec{s}_0}{|\vec{s}_0|}$ $\vec{n}_{(t)}$ normale en $\vec{\sigma}_{(t)}$ à $S_{(t)}$
 $\vec{\sigma}_{(t)} \in S_{(t)}$

car la normale à la surface limite, au point d'application de la contrainte $\vec{\sigma}_{(t)}$, garde une direction constante identique à celle du déviateur de la contrainte (propriété D).

Soit $\vec{s}_a(t)$ le déviateur de la contrainte $\vec{\sigma}_a(t)$ associée à $\vec{\sigma}_{(t)}$, on déduit des relations ci-dessus :

$$h_{(t)} = \vec{n}_{(t)} \times \vec{s}_{(t)} \quad h_a(t) = -\vec{n}_{(t)} \times \vec{s}_a(t)$$

ce qui donne (fig. 22) :

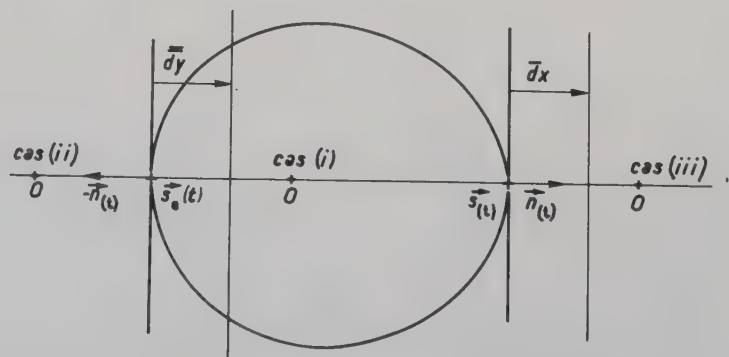


Fig. 22

(i) $h_{(t)} = |\vec{s}_{(t)}|$, $h_a(t) = |\vec{s}_a(t)|$ quand l'origine appartient à $D_{(t)}$,

(ii) $h_{(t)} = |\vec{s}_{(t)}|$, $h_a(t) = -|\vec{s}_a(t)|$ quand l'origine est à "gauche" de $D_{(t)}$ par rapport à $\vec{n}_{(t)}$,

(iii) $h_{(t)} = -|\vec{s}_{(t)}|$, $h_a(t) = -|\vec{s}_a(t)|$ quand l'origine est à "droite" de $D_{(t)}$ par rapport à $\vec{n}_{(t)}$.

Le cas (i) fut le seul rencontré au cours des expériences effectuées.

Posons $x=h(t)$ $y=h_a(t)$, nous avons alors : $\bar{d}y = f(x, y) \bar{d}x$

$$\bar{d}y = f(x, y) \bar{d}x \quad \begin{array}{l} \bar{d}x \text{ variation imposée,} \\ \bar{d}y \text{ variation résultante.} \end{array}$$

II,3.1.1. Cas $f(x, y) \cdot f(y, x) = 1$.

Imposons dans ce cas une variation $\bar{d}y$, il en résulte une variation $\bar{d}x$ de la tangente associée à la normale extérieure $\vec{n}$; nous avons alors, mutatis mutandis (fig. 23) :

$$\bar{d}x = f(y, x) \bar{d}y$$

Cette relation et la relation $\bar{d}y = f(x, y) \bar{d}x$ peuvent se résumer en une seule :

$$dy = \left[f(x, y) \times U + \frac{U-1}{f(y, x)} \right] dx$$

où U est égal à $+1$ dans le cas où l'on agit directement sur

$x (x = \vec{\sigma}_{(t)} \times \vec{n}_{(t)})$ et à 0 dans le cas contraire ($y = \vec{\sigma}_{(t)} \times \vec{n}_{(t)}$).

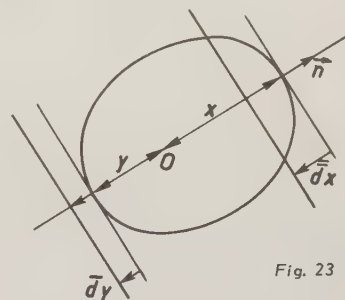


Fig. 23

Dans le cas particulier où $f(x, y) \times f(y, x) = 1$, cette relation devient :

$$dy = [f(x, y) U + (U-1) f(x, y)] dx$$

$$dy = f(x, y) dx \quad \text{quel que soit } U.$$

Toute forme différentielle d'ordre 1 à 2 variables a des facteurs intégrants, donc la forme $dy - f(x, y) dx$ possède, au moins, un facteur intégrant $\lambda(x, y)$. Soit $F(x, y)$ la primitive de $(dy - f(x, y) dx) \lambda$:

Nous avons donc $F(x, y) = C$ et F étant défini à une constante près $F(x, y) = 0$ équation de la courbe lieu du point (x, y) .

Revenons à l'égalité $f(x, y) \times f(y, x) = 1$ et cherchons la forme générale d'une fonction vérifiant cette relation :

$$\begin{aligned} & \uparrow f(x, y) \times f(y, x) = 1 \longrightarrow f(x, x) = \pm 1 \quad \forall x \\ & \downarrow f^2(x, y) - f^2(y, x) = 1 \quad \text{et} \quad \text{sign.}(f(x, y)) = \text{sign.}(f(y, x)) \\ & \downarrow \text{Log } f^2(x, y) + \text{Log } f^2(y, x) = 0 \end{aligned}$$

d'où en posant

$$V(x, y) = \text{Log } f^2(x, y)$$

$$V(x, y) + V(y, x) = 0$$

soit

$$\begin{cases} x + y = s \\ x - y = d \end{cases}$$

posons

$$V(x, y) = G(s, d) \quad (V(y, x) = G(s, -d))$$

d'où

$$G(s; d) + G(s, -d) = 0 \longrightarrow G(s, 0) = 0$$

G est impaire en d , soit :

$$g(s, d) = \frac{1}{2} G(s, d)$$

alors :

$$f^2(x, y) = \exp [G(x+y, x-y)]$$

et $f(x, y) = \pm \exp [g(x+y, x-y)]$ $g(s, d)$ impaire en d

pour $x = y$ $f(x, x) = \pm 1$ donc $f(x, y) = \text{sign.}(f(x, x)) \exp [g(x+y, x-y)]$

avec pour seule condition $g(s, d)$ impaire en d . On peut donc écrire aussi :

$$f(x, y) = \text{sign}(f(x, x)) \exp[k(x+y, x-y) - k(x+y, y-x)]$$

où k est une fonction de même classe que f et quelconque.

Si $f(x, y)$ est de classe C' , alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} dy/dx = f(x, y) \\ \text{avec } x = x_0 \rightarrow y = y_0 \\ x_0 = y_0 \text{ (isotropie initiale)} \end{cases}$$

admet toujours une solution maximale unique $y = g(x)$, g de classe C' .

De même le problème suivant $dx/dy = f(y, x)$, $y = y_0 \rightarrow x = x_0$ admet la solution $x = g(y)$

Comme ces deux "problèmes" sont identiques, nous devons donc avoir à la fois $y = g(x)$ et $x = g(y)$ d'où $g(g(x)) = x$.

Si $f(x, x) = 1$ la solution, triviale, est alors $y = x$, si $f(x, x) = -1$ la courbe d'équation $y = g(x)$ est symétrique, par rapport à $y = x$, et monotone décroissante (par raison de symétrie, f étant supposée finie dans le domaine d'existence de x et y), (fig. 24).

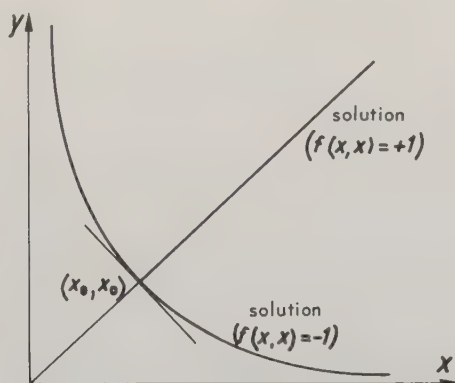


Fig. 24

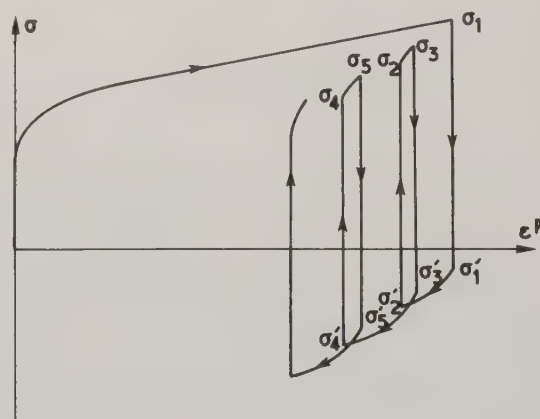


Fig. 25

A l'aide d'un certain nombre de "franchissements" de la limite élastique, dans le sens $+\vec{\sigma}_0$ et $-\vec{\sigma}_0$, nous pourrions alors obtenir des points expérimentaux dans toute la zone utile de la courbe $y = g(x)$ (fig. 25).

11.3.1.2. Cas $f(x, y) = r(x) \cdot s(y)$.

Faisons croître x depuis la valeur x_i à une valeur x' ($x' \geq x_i$).

Soit y_i la valeur initiale de y qui varie de y_i à y' , y' est obtenue en intégrant la relation :

$$dy = f(x, y) dx = r(x) s(y) dx$$

$$\frac{dy}{s(y)} = dx r(x)$$

soit

$$R(x') + S(y') = R(x_i) + S(y_i) = k(x_i, y_i)$$

avec

$$R(x) = \int_{x_i}^x r(x'') dx''$$

et

$$S(y) = - \int_{y_i}^y \frac{dy''}{s(y'')}.$$

Chacune des fonctions R et S est déterminée à une constante additive près et leur somme $R + S$ à une constante multiplicative près :

soit

$$\begin{cases} \mathcal{R}(x) = \lambda(R(x) + \gamma) \\ \mathcal{S}(y) = \lambda(S(y) + \delta) \end{cases}$$

alors si (x, y) décrit la courbe " $R(x) + S(y) = R(x_i) + S(y_i)$ " il décrit aussi la courbe " $\mathcal{R}(x) + \mathcal{S}(y) = \mathcal{R}(x_i) + \mathcal{S}(y_i)$ " :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x) + \mathcal{S}(y) &= \lambda(R(x) + \gamma) + \lambda(S(y) + \delta) \\ &= \lambda(R(x) + S(y)) + \lambda(\gamma + \delta) \\ &= \lambda(R(x_i) + S(y_i)) + \lambda(\gamma + \delta) \\ &= \lambda(R(x_i) + \gamma) + \lambda(S(y_i) + \delta) \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{R}(x) + \mathcal{S}(y) = \mathcal{R}(x_i) + \mathcal{S}(y_i) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Partant de valeurs initiales (x_i, y_i) , le point (x, y) décrira, lorsque nous ferons varier x , une courbe du plan (x, y) , nous nommerons cette courbe "courbe trajectoire" et nous en exposerons la détermination pratique.

Nous allons voir que, supposant connues deux de ces courbes, une détermination assez précise des fonctions $R(x)$ et $S(y)$ est possible.

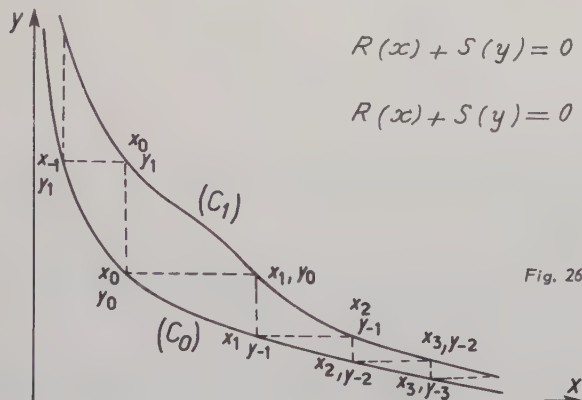
Soient C_0 et C_1 ces courbes.

Soit (x_0, y_0) un point de C_0 .

Par suite des indéterminations de la fonction R et de la fonction S , nous pouvons supposer que :

$$R(x_0) = 0 = S(y_0) \longrightarrow k = 0 \text{ sur } (C_0)$$

et prendre $k = 1$ sur la courbe (C_1) , d'où :



$$R(x) + S(y) = 0 \longleftarrow (x, y) \in (C_0)$$

$$R(x) + S(y) = 0 \longleftarrow (x, y) \in (C_1).$$

Entre (C_0) et (C_1) intercalons la fonction en escalier telle que :

$$(x_p, y_{-p}) \in (C_0)$$

$$(x_p, y_{-p+1}) \in (C_1)$$

$$\forall p \in \mathbb{Z}.$$

Fig. 26

Si les courbes (C_0) et (C_1) représentent des fonctions monotones, à partir d'un point (x_0, y_0) , la construction est unique, dans le cas contraire on effectuera l'ensemble des constructions possibles.

Les relations vérifiées par les points successifs sont :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} R(x_n) + S(y_{-n}) = 0 \\ R(x_n) + S(y_{-n+1}) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad R(x_0) = S(y_0) = 0.$$

De ces deux relations on déduit :

$$S(y_n) = R(x_n) = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$S(y)$ étant fini $S'(y) = -1/S(y)$ n'est jamais nulle et les courbes trajectoires n'ont pas de tangentes parallèles à Oy .

Supposons que les courbes C aient des tangentes parallèles à $0x$, alors il existe λ tel que $R(x) = -S(\lambda)$ ait plusieurs racines en x ($x_1, \dots, x_n$).

Aux points $(x_1, \lambda), (x_2, \lambda), \dots, (x_n, \lambda)$ de la courbe (C_0) correspondent des points $(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2), \dots, (x_n, \lambda_n)$ de la courbe (C_1) avec :

$$\begin{cases} R(x_i) = -S(\lambda) \\ R(x_i) = -S(\lambda_i) + 1 \end{cases}$$

d'où $S(\lambda_i) = 1 + S(\lambda)$ et si $S(y)$ est continue, $S'(y)$ étant différente de zéro, cette équation en λ_i (λ fixé) admet au plus une solution λ' et les points $(x_1, \lambda_1) \dots (x_n, \lambda_n)$ s'ils existent, sont sur une même parallèle à $0x$ (fig. 27).

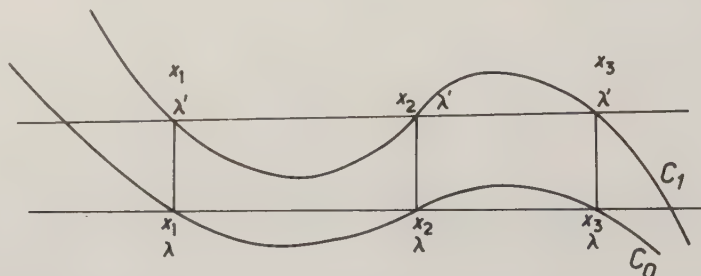


Fig. 27

Les graphes approximatifs de ces fonctions sont alors obtenus par interpolation des valeurs des fonctions $R(x)$ et $S(y)$.

D'où par dérivation :

$$r(x) = \frac{d}{dx} (R(x))$$

et

$$s(y) = \frac{-1}{\frac{d}{dy} (S(y))}$$

et

$$f(x, y) = - \frac{d}{dx} (R(x)) / \frac{d}{dy} (S(y)).$$

Une amélioration de la méthode décrite ci-dessus est donnée dans l'annexe C.

II,3.2. Détermination des fonctions ℓ^1 et ℓ^2 .

Ces deux fonctions seront déterminées par des essais de chargements simples, sans retour en arrière, suivis de recherches expérimentales des surfaces limites résultantes, qui sont alors de révolution autour de l'axe $\vec{S}$ (dans l'espace des déviateurs).

Les méridiennes de ces surfaces limites seront obtenues par la mesure des limites élastiques d'éprouvettes de traction (planche 19) découpées dans une éprouvette plate de traction (planches 17, 18).

Par suite de la forme des lois proposées, la surface limite du matériau est de révolution autour de l'axe défini par le tenseur

$$S_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix},$$

dans les axes ($0\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$), (dans l'espace des déviateurs).

Soit $S^* = (0\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, $0\vec{x}_1$ axe de l'éprouvette plate, un système d'axes associés à cette grande éprouvette.

Soit $S = (0\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$, un système d'axes associés à la petite éprouvette sur laquelle sera effectuée une traction simple $\vec{\sigma}$ (fig. 28).

Soit $\vec{\sigma}_S$ l'expression de $\vec{\sigma}$ dans la base S :

$$\sigma_s = X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base S^* l'expression de $\vec{\sigma}$ est donc :

$$\sigma_{s^*} = X \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

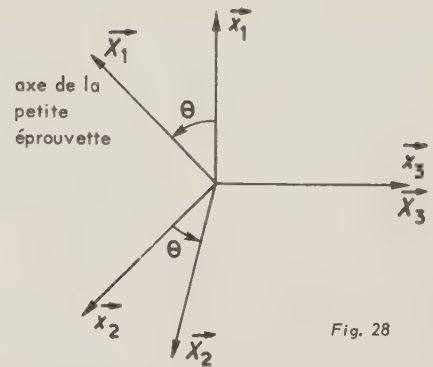


Fig. 28

D'où, dans cette même base, l'expression du déviateur $\vec{s}$ de $\vec{\sigma}$:

$$s_{s^*} = X \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - 1/3 & \sin \theta \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

et $|\vec{s}| = |X| \sqrt{\frac{2}{3}}$

Soit A l'angle entre $\vec{s}$ et $\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{|s_{s^*}|^2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} X \left(\frac{2}{3} \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \right) \longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 A = \left(\frac{2}{2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \right)^2 - 1 \\ \operatorname{sign}(\cos A) = \operatorname{sign}(X(2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) \end{cases}$$

Pour une traction-torsion d'axe Ox_1 , nous aurions :

$$s_{s^*} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & -\frac{\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{3} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad |\vec{s}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

et $\cos A = \frac{\operatorname{sign.} \sigma}{\sqrt{1 + 3 \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} \quad |\operatorname{tg} A| = \left| \sqrt{3} \frac{\tau}{\sigma} \right|.$

On peut donc établir un tableau des correspondances entre θ et A :

θ	0	30°	55°44'	60°	90°	45°
$\operatorname{tg} A$	0	1,248	∞	-8,03	-1,732	3,93
A	0	51°18'	90°	97°6'	120	75°44'

pour $X > 0$

si $X \rightarrow -X$: $A \rightarrow A + \pi$.

Les fonctions $\ell^1(h, c)$ et $\ell^2(f(h'_a, h'), c)$ sont alors développées par rapport à h et f , respectivement :

$$\ell^1(h, c) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(c) \frac{h^i}{i!} \quad c < \pi/2 \text{ rd.}$$

$$\ell^2(f(h'_a, h'), c) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(c) \frac{f^i(h'_a, h')}{i!}.$$

Pour des développements des ℓ arrêtés à l'ordre π , il nous faudra $n + 2$ déterminations de surfaces limites (dont la surface de référence) correspondant à des valeurs différentes de h , f étant supposée connue.

Les conditions imposées aux fonctions ℓ^1 et ℓ^2 permettront de faire un choix entre les deux moules mathématiques proposés.

III. CALCUL DE LA DÉFORMATION

III,1. Principe du calcul.

A chaque critère, défini par un plan tangent à la surface limite, nous allons, en généralisant la théorie de W.T. Koiter [7], associer un "potentiel de déformation plastique".

Pour une variation $d\mathbb{E}$ de l'écoulement, nous allons associer à chaque critère une "densité de déformation plastique" par unité d'"angle solide" (relativement aux normales $\vec{n}'$), ([8, 16, 17]).

La déformation plastique sera obtenue en intégrant cette densité sur l'ensemble des normales $\vec{n}'$. Le résultat de cette intégration devra être normal à la surface limite en $\vec{\sigma}$ ([11, 12] et [2, 13, 14]).

Soit Ω l'angle solide, $f(\mathbb{E}, \pi', \vec{p}')$ le potentiel relatif à la position (sens de glissement $\vec{p}'$) :

$$\delta \bar{\mathcal{E}}^p = \delta \Omega \frac{\partial f(\mathbb{E}, \pi', \vec{p}')}{\partial \mathbb{E}} d\mathbb{E}$$

ce que nous pouvons écrire :

$$\frac{\delta \bar{\mathcal{E}}^p}{d\mathbb{E}} = \delta \Omega \vec{g}(\mathbb{E}, \pi, \vec{p}, \pi', \vec{p}')$$

$$\bar{\mathcal{E}}^p = \int_{\{\vec{n}'\}} \vec{g}(\mathbb{E}, \pi, \vec{p}, \pi', \vec{p}') d\mathbb{E} d\Omega$$

$$\bar{\mathcal{E}}^p = d\mathbb{E} \vec{g}(\mathbb{E}, \pi, \vec{p}) \text{ et à } (\pi, \vec{p}) \longleftrightarrow \vec{n}$$

donc

$$\bar{\mathcal{E}}^p = d\mathbb{E} \vec{g}(\mathbb{E}, \vec{n})$$

$$\bar{\mathcal{E}}^p \text{ devant être porté par } \vec{n} : \quad \bar{\mathcal{E}}^p = \vec{n} \mu(\mathbb{E}, \vec{n}) d\mathbb{E}.$$

III,2. Fonction μ .

Cas d'un chargement simple sans retour en arrière

$$\text{Alors :} \quad \mathbb{E} = \mathbb{E}(h, \vec{n})$$

et

$$\bar{\mathcal{E}}^p = \vec{n} \mu(\mathbb{E}(h, \vec{n}), \vec{n}) d\mathbb{E}$$

$$\bar{\mathcal{E}}^p = \vec{n} K(h, \vec{n}) d\mathbb{E}$$

et par suite de l'équivalence des chargements simples :

$$\bar{\mathcal{E}}^p = \vec{n} L(h) d\mathbb{E} \text{ avec } h = |\vec{s}|$$

$$\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \vec{n} \quad \bar{\mathcal{E}}^p = \vec{s} \mathcal{L}(|\vec{s}|) d|\vec{s}| \quad \mathcal{L}(x) = \frac{L(x)}{x}.$$

$$\begin{cases} h = \text{distance de } 0 \text{ à } \pi \\ \tilde{h} = \text{distance de } 0 \text{ à } \{ \tilde{\pi} \mid \vec{n} \times \vec{n} = 0 \} \end{cases}$$

IV. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les expériences, destinées à la vérification de la représentativité du moule mathématique, ont été effectuées, en traction, compression et torsion, sur des éprouvettes cylindriques creuses.

IV,1. Matériaux.

Plusieurs types de matériaux furent étudiés :

- duralumins D22, D23 et D26 recuits à 490°C pendant trente minutes et refroidis en "air calme",
- duralumin D21 recuit à 400°C pendant trente minutes et refroidi en "air calme",
- acier 25 CD 4 S (A20) recuit à 880° pendant trente minutes et refroidi en "air calme".

IV,2. Epreuves.

Trois formes d'éprouvettes ont été utilisées :

- éprouvettes de "compression-torsion" (machine "C.T."*, duralumin D22), (planche I),

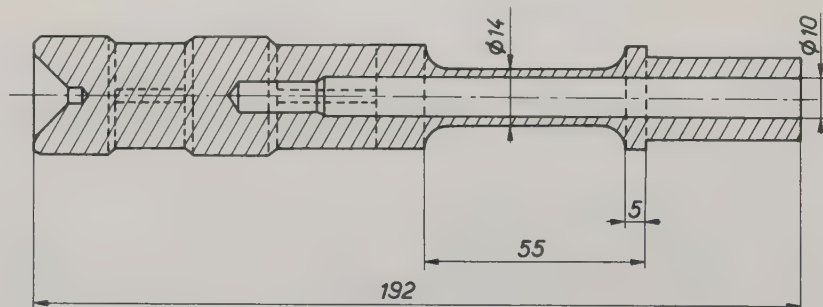


Planche I - Epreuve de compression - Torsion.

- éprouvettes de "compression-torsion-traction" (2 types légèrement différents ont été utilisés, machine "T.T.C."**, acier A20, duralumin D23 et D26, (planches 2, 3).

Les éprouvettes en duralumin D21 étaient cylindriques pleines et utilisables sur la machine "T.T.C." ([24]).

L'ensemble des résultats expérimentaux obtenus peut être divisé en deux :

- en premier lieu, les déterminations complètes ou partielles de l'une ou de deux des trois fonctions f , ℓ et μ relatives à un matériau donné,
- en second lieu, pour le duralumin D26, une détermination des trois fonctions f , ℓ et μ et une comparaison des précisions, dans le calcul de la déformation résultant d'un chargement en torsion et traction, obtenues par le "modèle anisotrope proposé", la "théorie isotrope" et la "théorie orthotrope", ([24]).

* Machine de compression et torsion.

** Machine de torsion, traction et compression (planche 2).

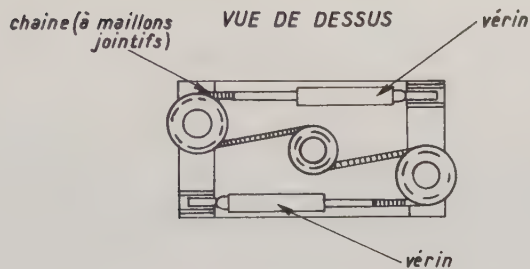
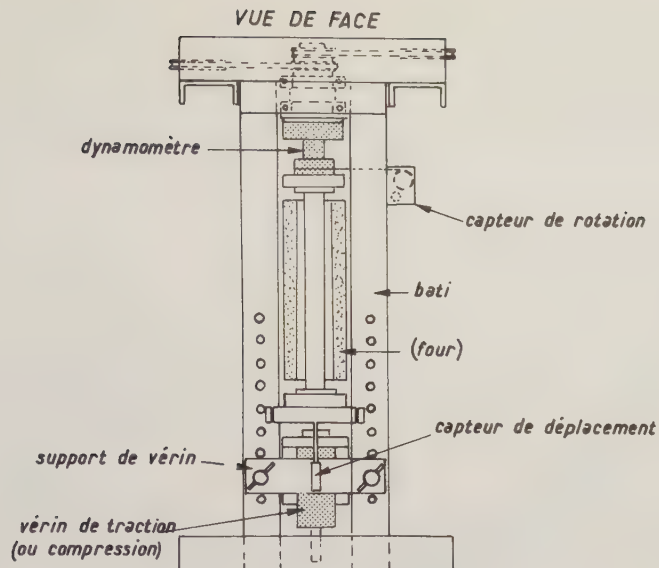


Planche II - Machine d'essais en traction, torsion et compression.

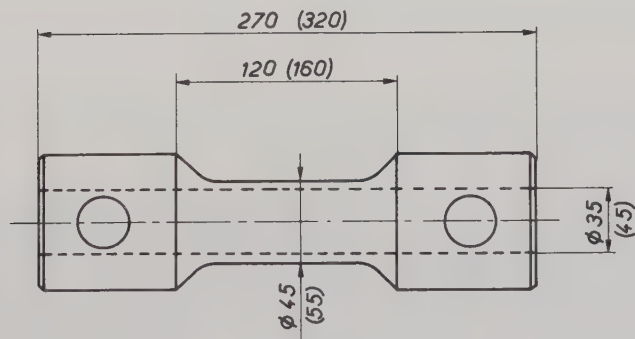


Planche III - Eprouvette de traction - compression - torsion.

IV,3. Déterminations partielles de (f, ℓ, μ) .

IV,3.1. Fonction f .

Relativement à la fonction f , deux types d'essais furent entrepris, l'un correspondant au cas des courbes stabilisées, l'autre à celui (plus général) des courbes trajectoires (voir II,3,1 et II,3,12).

IV,3.1.1. Courbes stabilisées.

Ce cas de stabilisation correspond au cas $f(x, y) \times f(y, x) = 1$.

Pour le duralumin D23 (éprouvettes T.T.C. 35 x 45) la courbe stabilisée, définie par la relation ci-dessus, est atteinte après quelques écrouissages alternés (essais en traction et compression, planche 4).

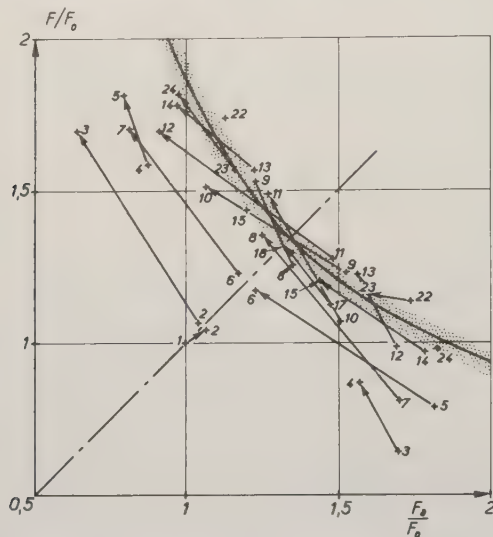


Planche IV - Duralumin (D23).

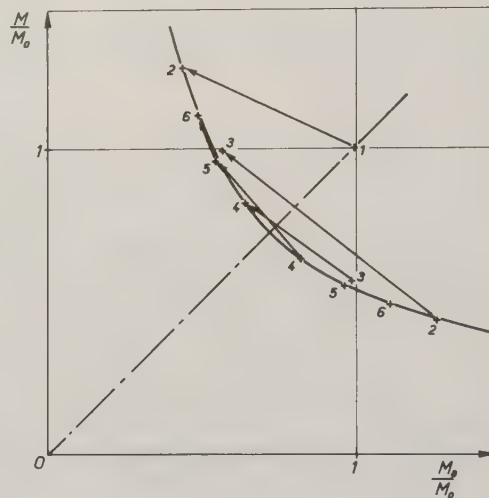


Planche V - Courbe stabilisée (Acier A20).

Pour l'acier A20, dont la courbe de premier écrouissage présente un palier juste à la limite élastique et donc une instabilité, il y a passage rapide de l'état non écroui à un état plus stable et la "courbe stabilisée" est immédiatement atteinte (essais en torsion alternée, planche 5).

IV,3.1.2. Courbes trajectoires.

Cette détermination fut effectuée en torsion simple (machine de compression et torsion, éprouvettes CT D22).

Il a été procédé à des torsions alternées en notant pour chaque courbe d'écrouissage la contrainte "limite élastique" et la contrainte maximale appliquée.

La contrainte limite a été supposée atteinte lorsque la variation, par rapport à l'état précédent, de la déformation plastique était égale à $3,5 \cdot 10^{-5}$ (à peu près le trentième de la déformation, à la limite élastique, du matériau non écroui).

Lors de l'application d'une torsion négative, le dépassement, par la contrainte appliquée, de la contrainte limite était assez important alors que, lors de l'application d'une torsion positive, il était assez faible pour que nous soyons assurés d'une assez faible variation de la contrainte limite associée (les points représentatifs de l'état des contraintes limites appartiennent alors, sensiblement, tous à la même courbe trajectoire), (planche 6).

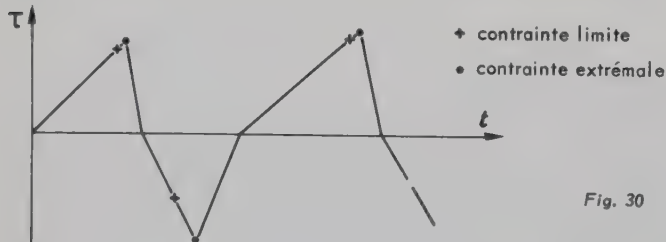


Fig. 30

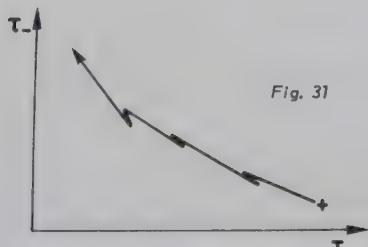
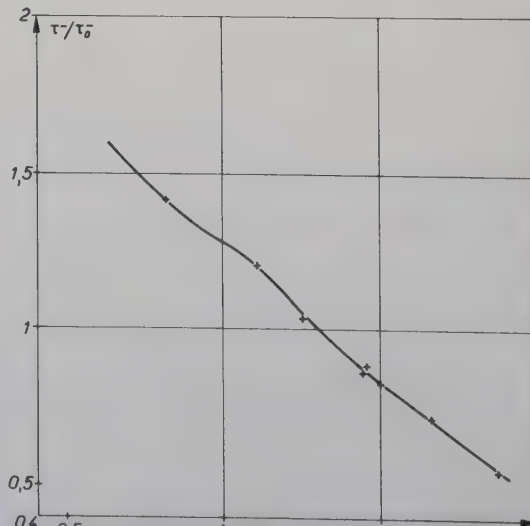


Fig. 31

Planche VI - Courbe trajectoire.



L'imprécision des mesures n'a pu permettre d'espérer trouver des résultats autres que qualitatifs malgré le grand nombre des essais (plus de soixante-dix expériences de torsion "monotone").

Ces résultats confirment cependant ceux donnés par des essais effectués sur la machine "T.T.C.", en traction, torsion et compression.

IV,3.2. Fonction ℓ .

Des essais en traction et torsion, effectués sur du duralumin D21, ont montré le caractère anisotrope du matériau utilisé [24].

En supposant que cette anisotropie provenait d'un écrouissage en traction d'un matériau initialement isotrope, et répondant au critère de Von Mises, il est possible de déduire d'expériences de traction simple, effectuées sur des éprouvettes taillées dans une barre de ce même métal, la forme de la méridienne de la surface limite (et donc la section de cette surface limite par le "plan des tractions-torsions", $(\sigma, \tau \sqrt{3})$, (planche 7).

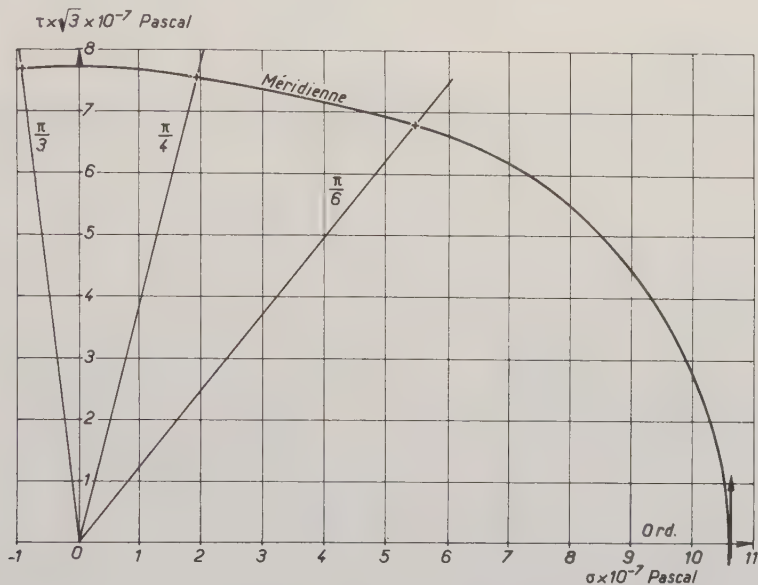


Planche VII - Détermination d'une méridienne.

Et reportant dans un tableau les valeurs des contraintes limites trouvées expérimentalement, nous obtenons :

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\frac{\tau \sqrt{3}}{\sigma}$	0	1,248	3,93	8,03	1,732
χ_{limite}	10,6	8,7	7,75	7,7	8,2

x 10⁷ Pascal

Si nous arrêtons les développements de $\ell^{\bar{r}}$ ou $\ell^{\bar{z}}$ à l'ordre zéro, alors :

$$\ell^{\bar{r}}(h, c) = \ell^{\bar{z}}(f(h'_a, h'), c) = \varphi(c) \quad c \leq \pi/\alpha \text{ rd.}$$

et, en intégrant la relation $\vec{d}h' = \varphi(c) \vec{d}h$ pour un chargement simple croissant :

$$h'_{(c)} = h_0 + \varphi(c)(h - h_0) \text{ avec } \varphi(0) = 1$$

h_0 étant la valeur initiale de h (correspondant à l'état isotrope non écroui).

Si $\varphi(\pi/2) = 0$ (condition de compatibilité, modèle avec $\vec{d}h' = \ell^{\bar{r}}(h, c) \vec{d}h$, $(c \leq \pi/2 \text{ rd.})$, condition de stabilisation des cycles, modèle avec $\vec{d}h' = \ell^{\bar{z}}(f(h'_a, h'), c) \vec{d}h$, $(c \neq \pi/2)$, alors :

$$h'(\pi/2) = h_0$$

et la fonction $\varphi(c)$ est totalement déterminée par la connaissance d'une méridienne (planche 8).

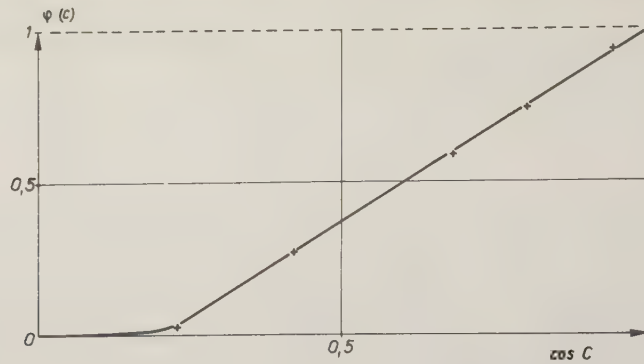


Planche VIII - $\bar{d}h' = \varphi(c) \bar{d}h$.

IV,3.3. Fonction $\mu(h, \tilde{h})$.

Reprenant des essais effectués sur du duralumin D21 [24], nous avons cherché à nous rendre compte des possibilités de remplacement de la fonction $\mu(h, \tilde{h})$ par le produit $\varphi(h) \times \psi(\tilde{h})$:

$$\bar{d}\vec{E}^p = \vec{n} \varphi(h) \cdot \psi(\tilde{h}) \bar{d}h.$$

Les éprouvettes étaient cylindriques (rayon R') et pleines.

Dans un système de coordonnées cylindriques ($r = U_1$, $\theta = U_2$, $z = U_3$) nous avons (fig.32)

$$\gamma = \gamma_{23} = z \, c_{23} = \Delta \theta \frac{r}{L}$$

($\Delta \theta$ rotation d'un rayon de la face supérieure, par rapport à la face inférieure considérée comme fixe, L distance entre ces deux faces).

Soit : $\gamma_M = \gamma_{(r=R')}$ $\gamma(r) = \Delta \theta \frac{r}{L}$ $\gamma_M = \Delta \theta \frac{R'}{L}$.

Soit : $\tau_R = \frac{2M}{\pi R'^3}$, M moment appliqué, $\tau(r) = \sigma_{23}(r)$ $M = \int_0^{R'} 2\pi r^2 \tau(r) dr$.

Prenons comme loi de comportement:

$$\sqrt{3} \tau(r) = \left(\gamma(r) \frac{k}{\sqrt{3}} \right)^{1/n} \quad \gamma(r) = \gamma_M \frac{r}{R'}$$

alors :

$$\tau(r) = \left(\frac{r}{R'} \right)^{1/n} \tau_M$$

et

$$M = \frac{\pi}{2} R'^3 \tau_R = \int_0^{R'} \tau_M \frac{r^{2+1/n}}{R'^{1/n}} 2\pi dr$$

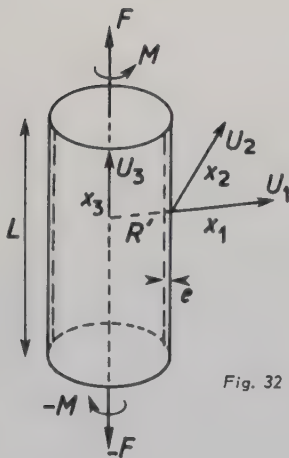


Fig. 32

$$\begin{cases} \tau_M \sqrt{3} = \tau_R \sqrt{3} \frac{3+1/n}{4} \\ \tau_M \sqrt{3} = \left(\gamma_M k / \sqrt{3} \right)^{1/n} \end{cases} \quad \sqrt{3} \tau_R = \frac{3+1/n}{4} k^{1/n} \left(\gamma_M / \sqrt{3} \right)^{1/n}.$$

Connaissant la courbe donnant M (donc $\tau_R \sqrt{3}$) en fonction de $\gamma_n / \sqrt{3}$, une affinité nous donne la courbe " $\tau_M \sqrt{3}$ " en fonction de $\gamma_M / \sqrt{3}$ (il faut, pour cela, que n soit constant, ce qui ne peut être réalisé rigoureusement que dans le domaine élastique avec $n = 1$, mais assez bien vérifié pour $\tau_R \times \sqrt{3} > 9.10^7$ Pascal), (planche 9).

La distance, dans le plan $(\sigma, \tau \sqrt{3})$, de l'origine à une tangente à la courbe limite est égale à $\sqrt{\frac{2}{3}} h$ (h distance de l'origine au plan tangent π correspondant).

Le matériau étant supposé écroui par traction, la courbe limite est et reste normale à l'axe des σ , lors d'un écrouissage ultérieur par traction ($S(t)$ étant de révolution autour de l'axe des $\vec{s}$ pour un chargement simple), nous supposons que l'axe des $\tau \sqrt{3}$ reste de même normal à $S(t)$ lors d'un écrouissage en torsion (fig. 33).

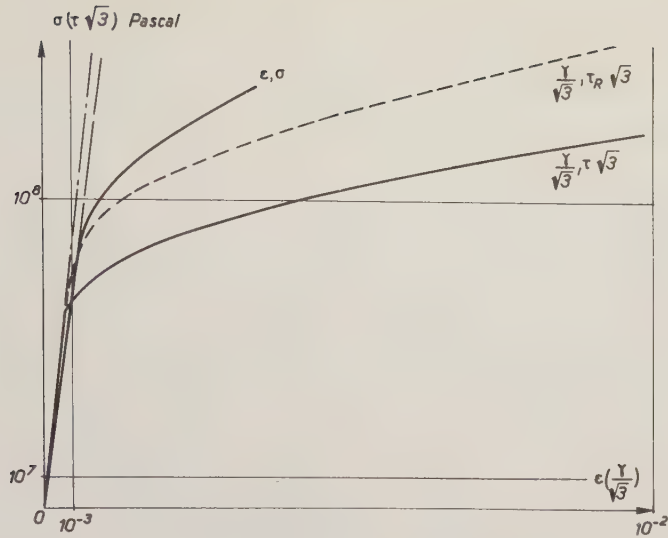


Planche IX - Comparaison de deux courbes d'écouissage (Duralumin D21).

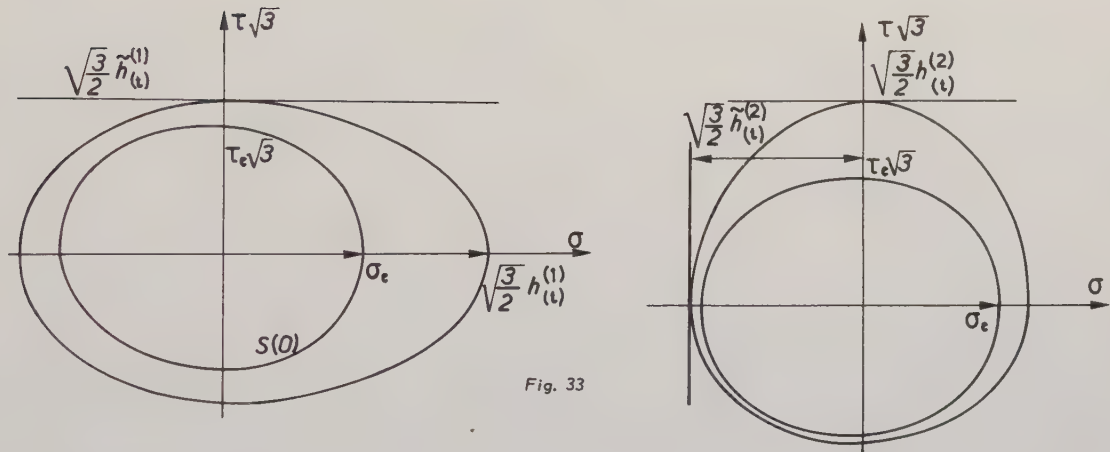


Fig. 33

Nous allons comparer la courbe d'écouissage en traction à celle d'écouissage en torsion.

Pour le premier type de chargement (indice 1), nous avons (fig. 33) :

$$\bar{d}\varepsilon^P = \varphi(h_{(t)}^{(1)}) \psi(\tilde{h}_{(t)}^{(1)}) \bar{d}h_{(t)}^{(1)}$$

et pour le second type :

$$\bar{d}\gamma^P / \sqrt{3} = \varphi(h_{(t)}^{(2)}) \psi(\tilde{h}_{(t)}^{(2)}) \bar{d}h_{(t)}^{(2)}$$

soit, pour

$$h_{(t)}^{(1)} = \sqrt{2/3} \quad \sigma_{(t)} = \sqrt{2} \quad \tau_{(t)} = k^{(2)}(t)$$

$$\bar{d}\varepsilon^P = (\bar{d}\gamma^P / \sqrt{3}) \times \frac{\varphi(\tilde{h}_{(t)}^{(1)})}{\varphi(\tilde{h}_{(t)}^{(2)})} = (\bar{d}\gamma^P / \sqrt{3}) \times K(t).$$

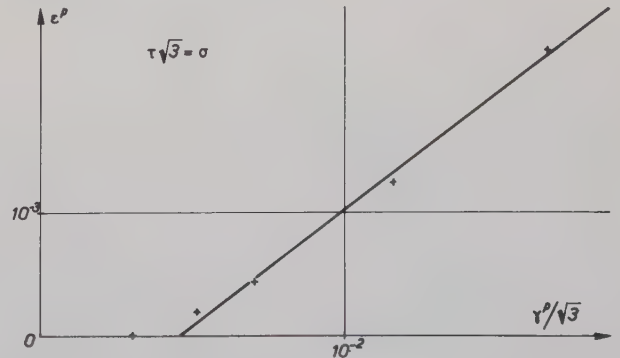


Planche X - Comparaison de deux courbes d'écouissage (Duralumin D21).

Et si $K(t)$ est une constante (ce qui est vérifié pour $\ell(\pi/2) = 0$ ou pour ψ fonction puissance et $\tilde{h}^{(1)}/\tilde{h}^{(2)}$ constant ...), le rapport $\bar{d}\varepsilon^P / \bar{d}(\gamma^P / \sqrt{3})$ reste constant pour $\tau\sqrt{3} = \sigma > \sup(\tau_e\sqrt{3}, \sigma_e)$, τ_e et σ_e étant les limites élastiques, en torsion et traction, du duralumin D21. L'expérience semble confirmer les hypothèses adoptées (planche 10).

IV,3.4. Propriétés de la surface limite.

Ces expériences ont permis de mettre en évidence certaines propriétés de l'évolution des surfaces limites.

Instabilité initiale (acier A20).

Lors du franchissement du palier de la courbe d'écrouissage, la surface limite initiale, instable et répondant au critère de Von Mises, se transforme de manière instantanée.

Ecroui à partir de cet état stable, le matériau se déforme alors sans discontinuités (planche 11, la numérotation repère les surfaces limites successives).

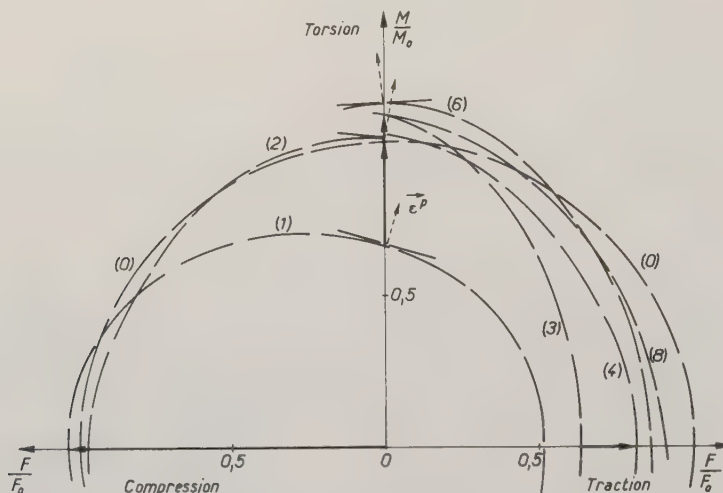


Planche XI - Acier (A 20).

Isotropie des faibles écrouissages (duralumins D22, 23, 26).

Pour des contraintes de l'ordre de 1,1 à 1,2 fois la limite élastique initiale, les surfaces limites semblent rester sensiblement sphériques (dans l'espace des déviateurs, avec la norme considérée) et l'écrouissage est donc alors presque isotrope (planches 12, 13).

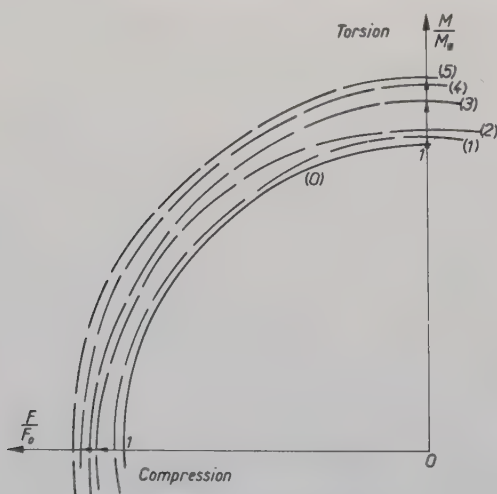


Planche XII - Duralumin (D 22).

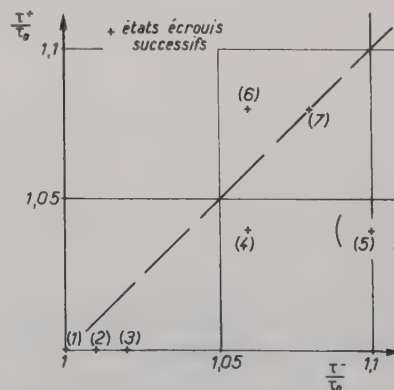


Planche XIII - Isotropie initiale de l'écrouissage.
(Torsion, AU4G, Machine C.T.)

Écarts vis-à-vis de l'écrouissage isotrope.

La normale à la surface limite, supposée donnée par la direction de $d\vec{\epsilon}^p$, est comparée avec la direction de $\vec{s}$, normale à la surface limite dans le cas d'un écrouissage isotrope.

Les écarts entre ces deux directions peuvent atteindre 30° , dans les expériences effectuées (planches 14 et 15).

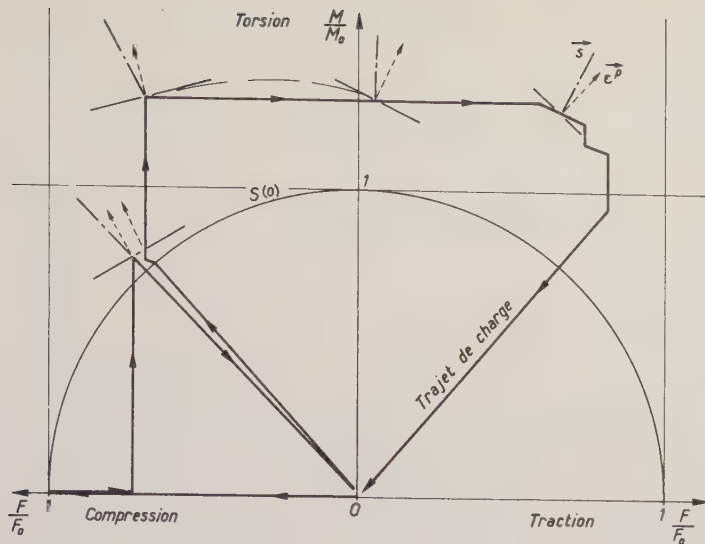


Planche XIV - Acier (A 20).

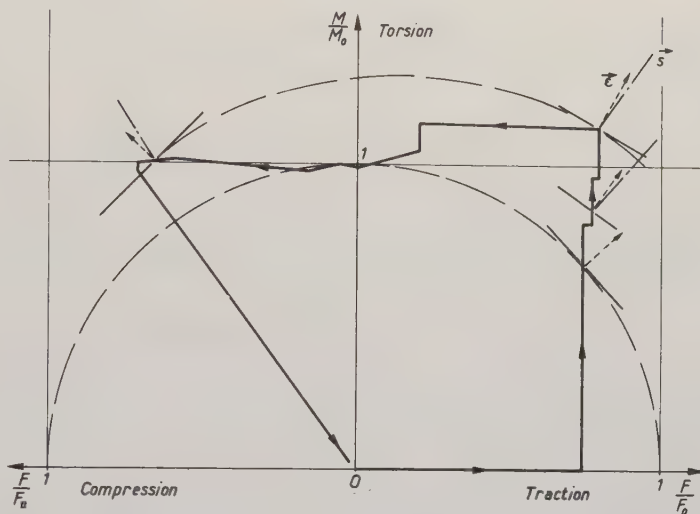


Planche XV - Duralumin (D 23).

IV,4. Vérification globale (duralumin D26).

Les fonctions f , ℓ^2 et μ ont été déterminées pour le duralumin D26 et appliquées au calcul de la déformation résultant d'un chargement en traction et torsion.

IV,4.1. Fonction $f(h, h_a)$.

Cette fonction a été obtenue par des essais de compression et traction, effectués sur des éprouvettes cylindriques creuses (planche 3, diamètre intérieur 45 mm, diamètre extérieur 55 mm).

f a été approximée par la fonction suivante (planche 16) :

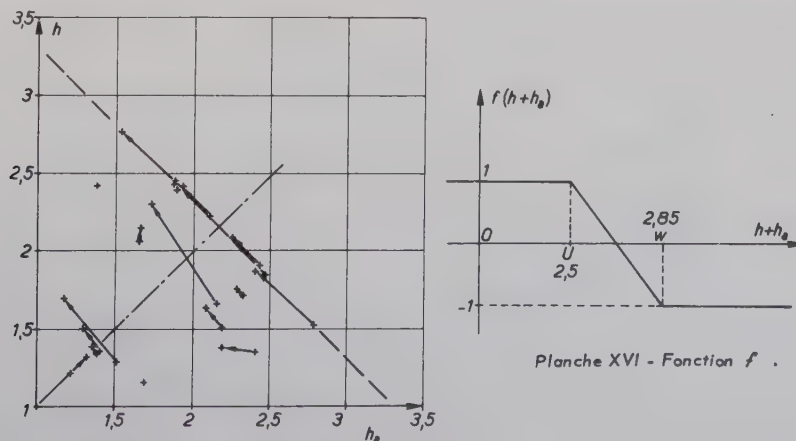


Planche XVI - Fonction f .

$$f(h, h_a) \simeq g(h, h_a) = \begin{cases} 1 & h + h_a \leq U (= 2, 5) \\ -1 & h + h_a \geq W (= 2, 85) \\ (W + U - Z(h + h_a)) / (W - U) & U \leq h + h_a \leq W \end{cases}$$

l'unité de distance étant la distance de 0 au plan tangent (à $S_{(0)}$, état écroui) correspondant à la torsion pure : $h_0 = 1$.

IV, 4.2. Fonction $\ell^2(c, f(h'_a, h'))$.

La fonction ℓ^2 est développée au premier ordre en f :

$$\ell^2(c, f) = \phi_0(c) + \phi_1(c) f(h'_a, h')$$

$$\begin{cases} \phi_0(0) = 1 & , & \phi_0(\pi \text{ rd.}) = 0 \\ \phi_1(0) = 0 & , & \phi_1(\pi \text{ rd.}) = 1. \end{cases}$$

Alors, pour des valeurs de H de l'ordre de $2\tilde{h}_0$ (voir page 39, annexe D), la convexité et la régularité de la surface limite sont respectées si :

$$\left| \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial c^2} + \phi_0 \right| \leq 1/2 \text{ et } \left| \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial c^2} + \phi_1 \right| \leq 1/2.$$

Considérons une des inéquations différentielles et intégrons-la à partir de $x = 0$:

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \phi_0(x) \geq -1/2.$$

Nous obtenons en posant $\phi_0(x) = A(x) \cos x$ $\begin{matrix} A(0) = 1 \\ A'(0) = 0 \end{matrix}$

$$-2 A' \sin x + A'' \cos x \geq -1/2$$

soit avec

$$c(x) = A'(x) \cos^2 x$$

$$c'(x) \geq -\frac{1}{2} \cos x \quad c(0) = 0$$

d'où

$$c(x) \geq -\frac{1}{2} \sin x$$

$$A' \cos^2 x \geq -\frac{1}{2} \sin x$$

$$A' \geq -\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \longrightarrow A \geq 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)$$

et

$$\phi_0(x) \geq \cos x + \frac{\cos x}{2} \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = \frac{3}{2} \cos x - \frac{1}{2}.$$

Nous obtenons de même (par des intégrations successives) :

$$\frac{3}{2} \cos x - \frac{1}{2} \leq \phi_0(x) \leq \frac{1}{2} (\cos x + 1)$$

$$\frac{1}{2} (\cos x - 1) \leq \phi_1(x) \leq \frac{1}{2} (-\cos x + 1).$$

Et en intégrant à partir de $c = \pi \text{ rd.}$

$$-\frac{1}{2} (1 + \cos x) \leq \phi_0(x) \leq \frac{1}{2} (1 + \cos x)$$

$$-\frac{3}{2} \cos x - \frac{1}{2} \leq \phi_1(x) \leq \frac{1}{2} (1 - \cos x)$$

(fig. 34).

Nous nous efforcerons de réaliser au mieux ces conditions.

La relation

$$\bar{d}h' = \ell^2(c, f) \bar{d}h$$

devient :

$$\bar{d}h' = (\phi_0(c) + \phi_1(c)) \bar{d}h \text{ pour } h' + h'_a \leq U$$

et

$$\bar{d}h' = (\phi_0(c) - \phi_1(c)) \bar{d}h \text{ pour } h' + h'_a \geq W.$$

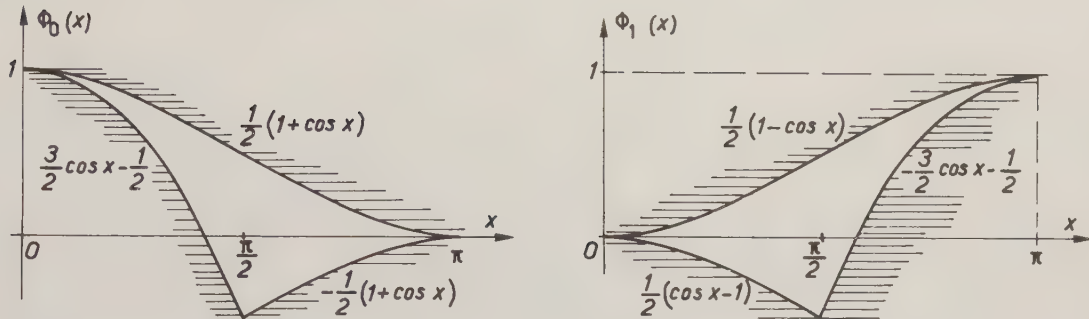


Fig. 34

En se plaçant dans ces cas particuliers, la détermination des fonctions ϕ_0 et ϕ_1 , à partir d'une série de surfaces limites, est immédiate.

En vue d'obtenir ces surfaces limites, des éprouvettes plates (machine "T.T.C", planche 17) ont été écrouies à des degrés divers, puis, de chacune de ces "grandes éprouvettes", ont été tirées, selon le plan de découpe figuré sur la planche 18, un ensemble de "petites éprouvettes" (planche 19).

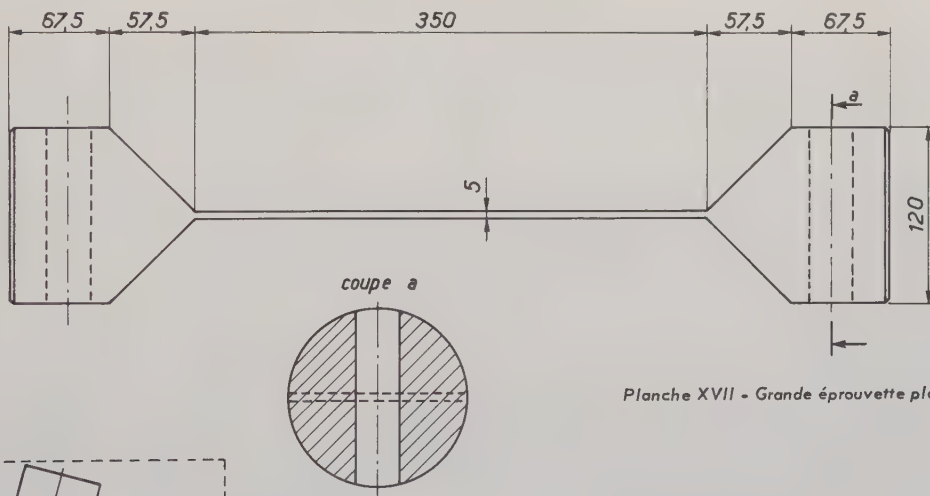


Planche XVII - Grande éprouvette plate.

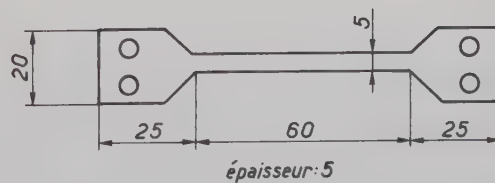
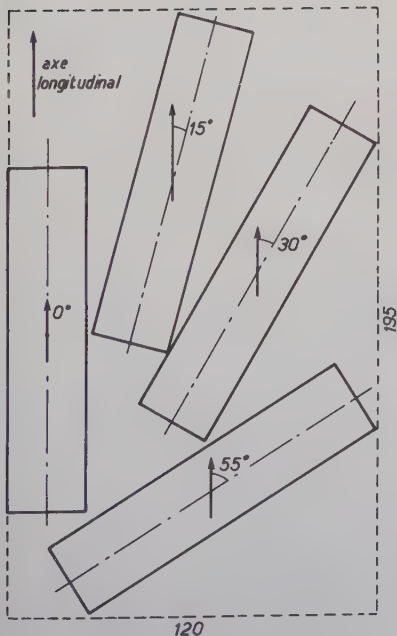


Planche XIX - Petite éprouvette.

Planche XVIII - Plan de coupe.

Les courbes d'écroissage de ces "petites éprouvettes", obtenues par des essais de traction effectués sur la machine "T.V.", ont fourni les surfaces limites cherchées (en fait, une partie de ces surfaces), (planche 20).

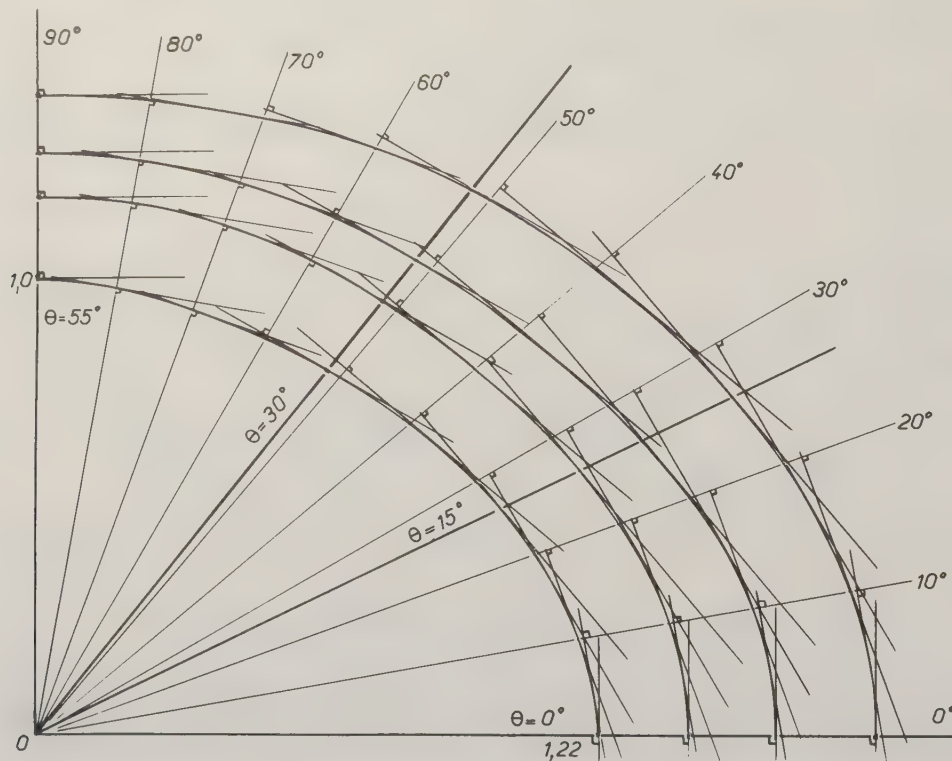


Planche XX - Surfaces limites.

L'état initial, non isotrope, a été supposé obtenu par un écroissage en traction pure, à partir d'un état précédent isotrope, écroissage dans l'axe des barres d'où furent tirées les éprouvettes.

La coïncidence, que cette hypothèse implique, entre la courbe d'écroissage en torsion pure et celle en traction pure ($\theta \approx 55^\circ$), ceci dans les axes ($|\vec{S}|$, $|\vec{E}^p|$), a été vérifiée.

En particulier, nous avons, l'axe des torsions étant normal à "S initiale" :

$$h_0 = \sigma_L \sqrt{\frac{2}{3}}$$

h_0 unité de distance

σ_L contrainte limite de la "petite éprouvette" correspondant à $\mathcal{E} = 0$ et $\theta \approx 55^\circ$.

Les fonctions $\phi_0(c)$ et $\phi_1(c)$, déterminées ainsi pour $c \leq \pi/2$, ont été extrapolées entre $\pi/2$ et π rd., en tenant compte :

- des conditions de parité et de périodicité :

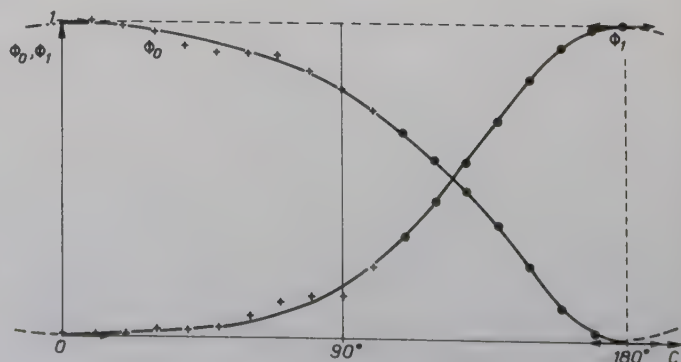
$$\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial c} \right)_{c=\pi \text{ rd.}} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial c} \right)_{c=\pi \text{ rd.}} = 0$$

- des conditions aux limites :

$$\phi_0(\pi) = 0 = \phi_1(0), \quad \phi_1(\pi) = 1 = \phi_0(0)$$

et de la nécessité d'assurer, au moins pour certains chemins de chargement, une régularité de la surface limite, (planche 21).

Planche XXI - Fonctions ϕ_0 et ϕ_1 .



IV,4.3. Fonction $\mu(h, \tilde{h})$.

La fonction μ a été mise sous la forme :

$$\mu(h, \tilde{h}) = \alpha (h-1)^\beta \left(\frac{\tilde{h}}{h}\right)^\gamma$$

c'est-à-dire

$$\mu(h, \tilde{h}) = \varphi(h) \psi(\tilde{h})$$

avec

$$\varphi(h) = \alpha (h-1)^\beta / h^\gamma, \quad \psi(\tilde{h}) = \tilde{h}^\gamma.$$

Les coefficients α , β et γ ont été déterminés à partir des courbes d'écouissage en traction pure ($\theta = 0^\circ$ et $\theta = 55^\circ$) du matériau initial.

La courbe d'écouissage ($\theta = 55^\circ$) était approximée par, (planche 22) :

$$\frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_L} = k \left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_L} \right)^n \quad \sigma \gg \sigma_L$$

ε_L déformation à la limite élastique.

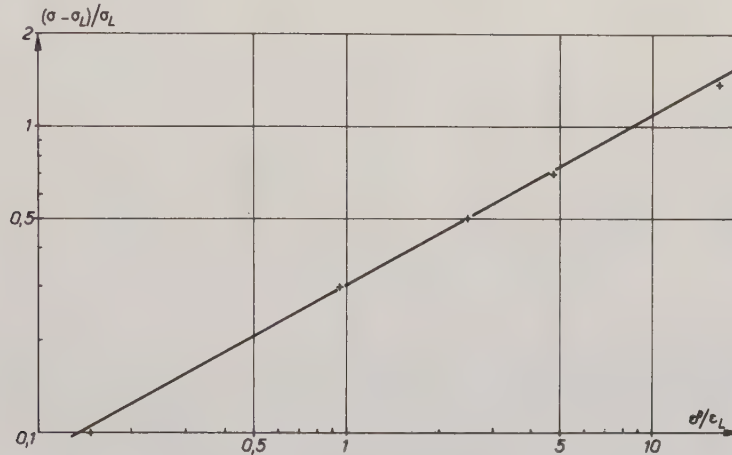


Planche XXII - Courbe d'écouissage ($\theta = 55^\circ$).

Pour le matériau considéré, les valeurs de ε , β et γ furent les suivantes :

$$\alpha = 13,96 \quad \beta = 0,8 \quad \gamma = 0,9$$

l'unité de contrainte étant σ_L , l'unité de déformation ε_L avec

$$\sigma_L = 6,75 \times 10^7 \text{ Pascal}$$

$$\varepsilon_L = 0,98 \times 10^{-3}.$$

IV,4.4. Calcul de la déformation.

Les formules permettant le calcul de la déformation pour un trajet de chargement fixé sont :

$$1^\circ) \quad \begin{cases} \bar{d}h' = \ell^2 (c, f(h'a, h')) \bar{d}h \\ \bar{d}\vec{\varepsilon}^p = n \mu(h, \tilde{h}) \bar{d}h \end{cases}$$

pour le modèle "anisotrope" proposé,

$$2^\circ) \quad \begin{cases} \bar{d}h' = \bar{d}h & h'_{(t=0)} = h_0 \\ \bar{d}\vec{\varepsilon}^p = \vec{n} \hat{f}(h) \bar{d}h & \left(\vec{n} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} \right) \end{cases}$$

pour le "modèle isotrope",

3°)

$$\begin{cases} \bar{d}h' = (h'_{(t=0)} / h_{(t=0)}) \bar{d}h \\ \bar{d}\vec{\varepsilon}^p = \vec{n} \hat{f} \left(\frac{h(t)}{h(0)} \right) \frac{\bar{d}h}{h(t=0)} \end{cases}$$

pour le "modèle orthotrope" [24].

Les unités de forces, moments, déplacements et rotations ont été choisies telles que :

- le moment $M = 1$ à la limite de torsion pure,
- la force $F = \frac{\sigma_{limite}(\theta = 0)}{\sigma_L(limite \theta = 55^\circ)} = 1,22$ à la limite de traction pure,
- le déplacement $D = F (= 1)$ à la limite de traction pure,
- et la rotation $R = \frac{1+\nu}{3/2} \times M$ à la limite de torsion pure

($R = 0,9$, avec ν , coefficient de Poisson, $= 0,35$).

Avec ces unités, la surface limite dans l'espace des forces est identique, pour le type d'éprouvettes considéré, à la surface limite dans l'espace $(\sigma, \tau \sqrt{3})$ et le vecteur $(\bar{d}D, \bar{d}R)$ coïncide avec le vecteur $\bar{d}\vec{\varepsilon}^p$.

Soit e l'épaisseur des éprouvettes cylindriques creuses utilisées ($e = 5$ mm) et soit R' le rayon moyen de ces éprouvettes ($R' = 25$ mm) alors le tenseur des contraintes est, dans les axes $(O\vec{x}_1, O\vec{x}_2, O\vec{x}_3)$, (fig. 32) :

$$\begin{pmatrix} F/2\pi R'e & M/2\pi R'^2 e & 0 \\ M/2\pi R'^2 e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ces axes, le tenseur des déformations s'écrit (L étant la longueur de l'éprouvette, $\Delta\theta$ la rotation d'une base par rapport à l'autre) :

$$\begin{pmatrix} \Delta L/L & \frac{1}{2} \Delta\theta \times R'/L & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta\theta \times R'/L & -\nu^* \Delta L/L & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \Delta L/L \end{pmatrix}$$

(ν^* , coefficient de Poisson élasto-plastique, est par définition égal à $-\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11}$).

Les résultats des calculs, par les méthodes "anisotrope", "isotrope" et "orthotrope", de la déformation, correspondant à un chemin de charge fixé (planche 23), ont été comparés à la déformation effectivement mesurée lors de l'application de ce chargement, à une éprouvette cylindrique creuse, par la machine "T.T.C."

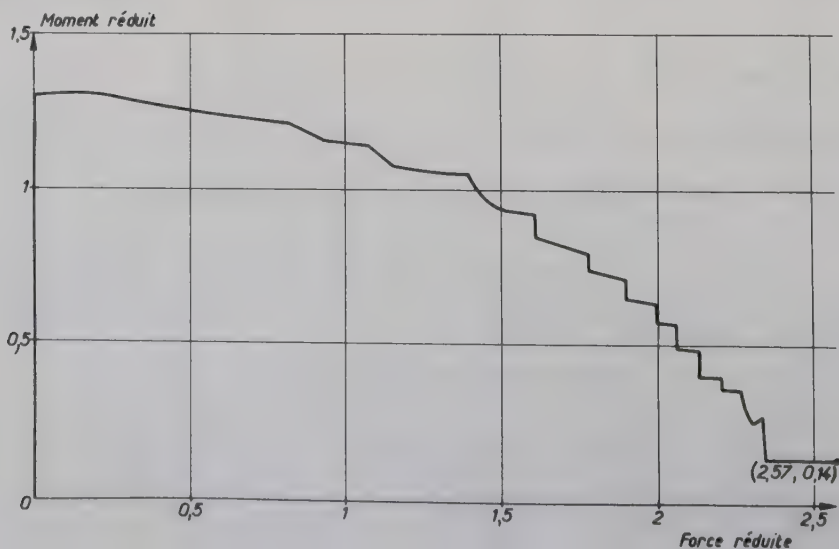


Planche XXIII
Trajet de chargement.

Les "erreurs relatives" $|\epsilon(\text{expérimental}) - \epsilon(\text{théor.})| / |\epsilon(\text{exp.})|$ étaient, à l'extrémité du trajet de charge, de l'ordre de :

- 4% pour le "modèle anisotrope",
- 12% pour le "modèle orthotrope",
- supérieures à 50% pour le "modèle isotrope".

Sauf dans la zone de chargement en torsion pure (zone où les trois modèles sont équivalents), le "calcul anisotrope" donne toujours une "erreur" plus faible que celles dues aux "calculs orthotrope et isotrope", (planches 24, 25, 26).

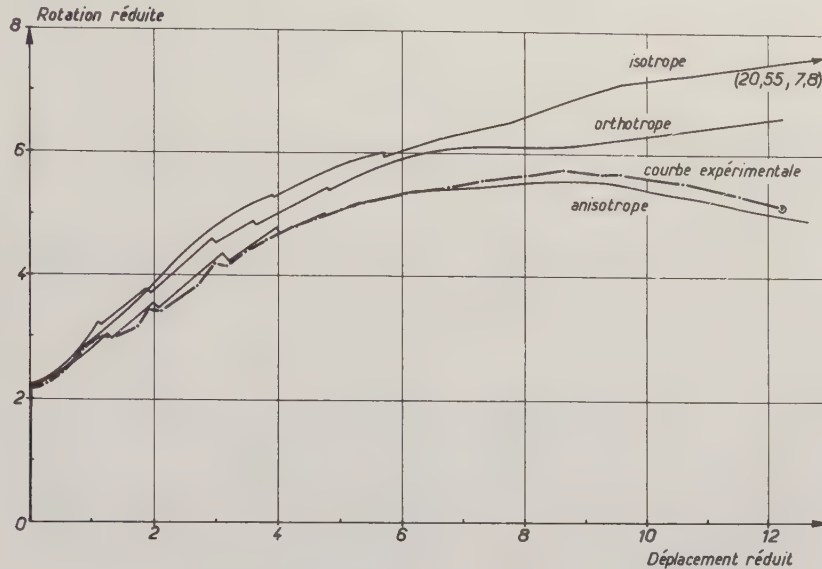


Planche XXIV - Comparaison des déplacements.

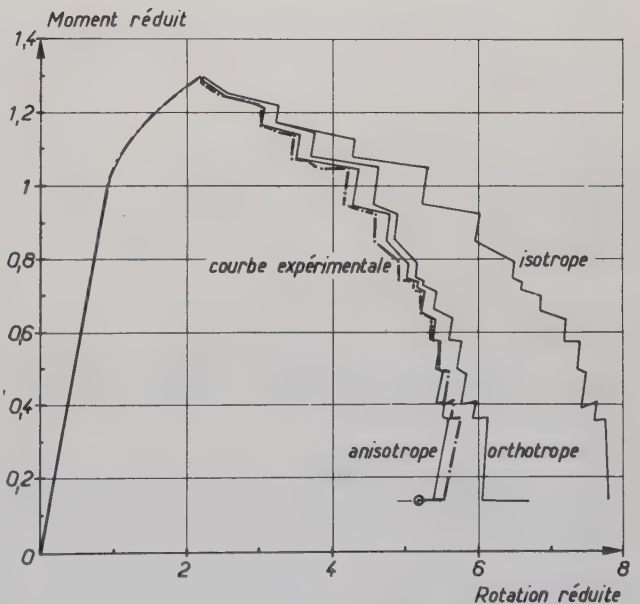
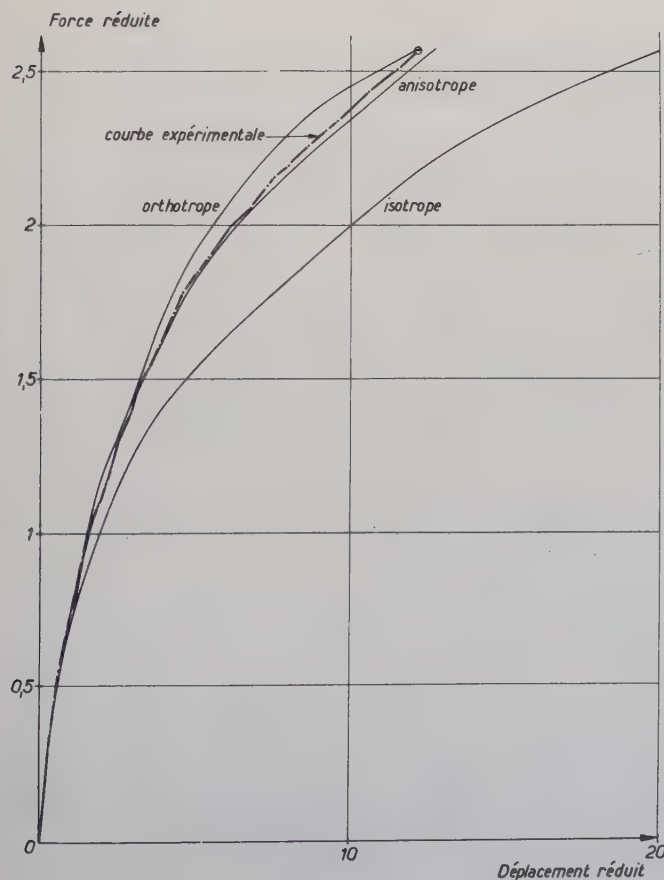


Planche XXVI - Ecroutissage (en torsion).

Planche XXV - Ecroutissage (en traction).

Les tracés des surfaces limites successives, calculées par le "modèle anisotrope" et par le "modèle orthotrope", montrent de fortes différences, dans le demi-plan $\sigma > 0$ surtout, dues principalement à l'effet Bauschinger (fonction f), (planche 27).

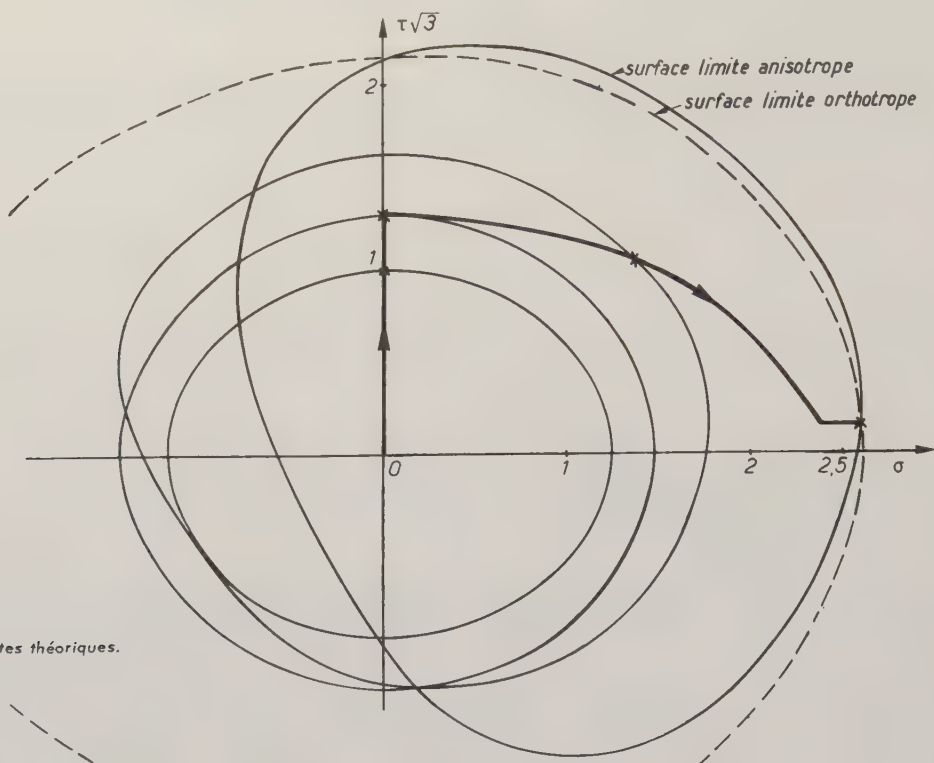


Planche XXVII - Surfaces limites théoriques.

CONCLUSION

Par suite de la complexité du comportement réel du matériau, un souci de simplification nous a amené à traduire d'une manière approchée le phénomène d'écrouissage des milieux métalliques.

L'introduction de l'angle C , "distance entre le critère directeur" (de position π) et un critère quelconque (de position π'), et des valeurs des cisaillements limites (χ' et χ'_a) en tant que paramètres caractéristiques de l'évolution de la surface limite nous a conduit à penser que deux fonctions pouvaient suffire à décrire cette évolution. La fonction f caractérise l'effet Bauschinger proprement dit, cette fonction est "complétée" par la fonction l qui rend compte des "effets latéraux".

Le calcul de la déformation nécessite ensuite l'introduction d'une troisième fonction, la fonction d'écrouissage μ .

Dans le cadre de cette méthode, diverses approximations peuvent être adoptées, selon la nature du problème posé, le type de matériau utilisé et l'importance des moyens mécanographiques disponibles.

Les conditions de convexité et de régularité (pages 39-41, annexe D) donnent certains résultats concernant l'évolution de la surface limite et précisent de quelle manière les cas envisagés par différents auteurs (pages 2-3, I,2.1) peuvent être considérés comme des cas particuliers de la théorie exposée.

La stabilisation des cycles et une description possible dans le cas d'un comportement élasto-visco-plastique sont étudiées.

Des applications à des matériaux autres que ceux dont on a cherché à décrire ici l'écrouissage, seraient nécessaires.

Mais, de toute façon, bien que comprenant une représentation du comportement "microscopique", le modèle mathématique proposé ne peut viser à rendre compte que de phénomènes globaux. Cependant, une complication de ce modèle semble actuellement superflue étant donné le but fixé.

ANNEXE A

La surface limite initiale est, dans l'espace des déviateurs, une sphère centrée en O , cette surface est de révolution autour de tout axe $\vec{S}/|\vec{S}|$.

Lors d'un chargement simple, les relations de Hencky-Mises nous donnent

$$\frac{\vec{\varepsilon}^p}{|\vec{\varepsilon}^p|} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}.$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il nous suffit de supposer que nous avons alors $\bar{d}h' = \ell(c, h, h_a, h', h'_a) \bar{d}h$ (voir II, 2.1, II, 2.4). Le calcul de la déformation plastique nous conduit automatiquement ensuite à l'égalité des tenseurs de direction $\vec{\varepsilon}^p/|\vec{\varepsilon}^p|$ et $\vec{S}/|\vec{S}|$.

D'autre part, (voir [1], [2]), la détermination des surfaces limites obtenues lors de chargements simples nous montre que : deux chargements simples (en "traction-torsion") se déduisent l'un de l'autre par une rotation, les sections des surfaces limites par le plan $(\tau\sqrt{3}, \sigma)$ sont symétriques par rapport à chaque axe de chargement (respectivement) et se déduisent l'une de l'autre par la même rotation (fig. 35).

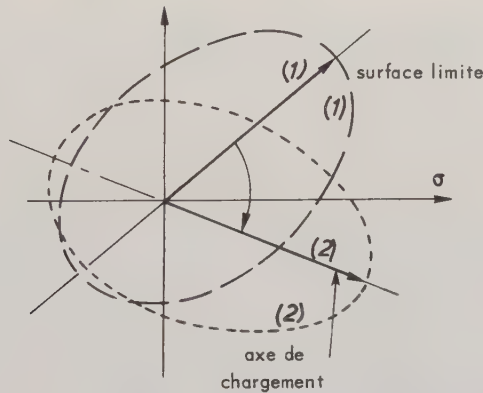


Fig. 35

ANNEXE B

Les surfaces limites, pour un grand nombre de matériaux métalliques non écrouis, correspondent sensiblement au même critère (critère de Von Mises).

Ramenons alors les contraintes à la contrainte limite initiale, les lois de variation de la surface limite deviennent :

$$\bar{d}h_a = \tilde{f}\left(\frac{h}{h_0}, \frac{h_a}{h_0}\right) \frac{\bar{d}h}{h_0}$$

$$\bar{d}h' = \tilde{\ell}\left(\frac{h}{h_0}, \frac{h_a}{h_0}, \frac{h'}{h_0}, \frac{h'_a}{h_0}, c\right) \frac{dh}{h_0}.$$

Si ces fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{\ell}$ sont identiques pour deux matériaux, alors si par une même homothétie (centrée à l'origine) il est possible de faire coïncider les surfaces limites initiales de ces deux matériaux et les trajets de charge correspondants, alors cette homothétie superposera aussi les surfaces limites successives (fig. 36).

Cette "homothétie" a été expérimentalement vérifiée pour le cuivre, l'aluminium et le fer doux, le point représentatif de l'état de contrainte décrivant une droite [2].

L'ensemble des matériaux à comportement plastique peut donc être décomposé en "classes d'équivalence", à chaque classe correspondant un couple de fonctions $(\tilde{f}, \tilde{\ell})$.

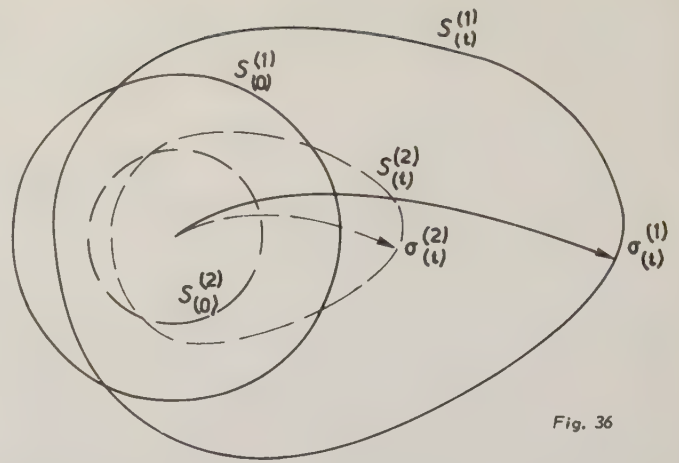


Fig. 36

ANNEXE C

CALCUL DE LA FONCTION $f(x, y)$

Si l'approximation n'est pas assez bonne, il est possible d'améliorer la méthode précédente (voir II,3.1.2).

Nous prenons comme équation d'une courbe trajectoire $(R(x) + S(y))(H(x) + I(y)) = k$.

Soient trois courbes trajectoires $(C_0), (C_1), (C_2)$.

Nous imposerons aux fonctions R, S, H et I de vérifier :

$$R(x) + S(y) = 0 \quad \text{sur la courbe } (C_0)$$

$$R(x) + S(y) = 1 = H(x) + I(y) \quad \text{sur la courbe } (C_1)$$

$$(R(x) + S(y))(H(x) + I(y)) = 2 \quad \text{sur la courbe } (C_2)$$

et pour un point de $(C_0), (x_0, y_0) : R(x_0) = 0 = S(y_0)$

et pour un point de $(C_1), (x'_0, y'_0) : H(x'_0) = 0, I(y'_0) = 1$.

En intercalant entre (C_0) et (C_1) une fonction en escalier passant par (x_0, y_0) et entre (C_1) et (C_2) une fonction en escalier passant par (x'_0, y'_0) , on peut, de la même façon que précédemment, trouver les valeurs, en un nombre fini de points, des fonctions R, S, H et I et par interpolation les graphes correspondants, (fig. 37).

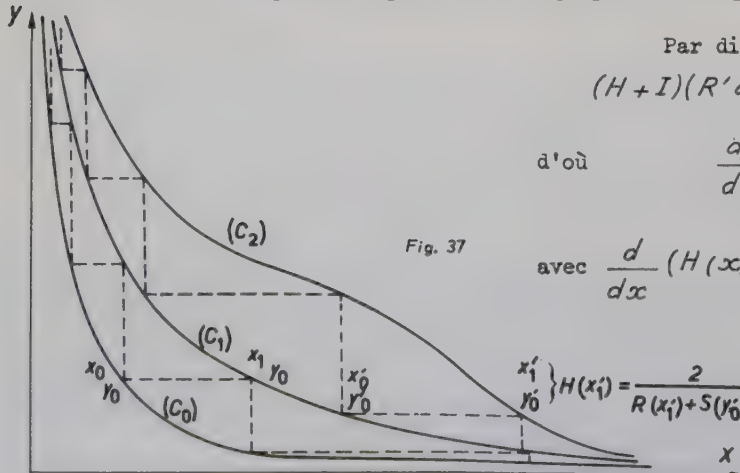


Fig. 37

Par différentiation, on en déduit alors :

$$(H + I)(R' dx + S' dy) + (R + S)(H' dx + I' dy) = 0$$

$$\text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{(H + I) R' + (R + S) H'}{(H + I) S' + (R + S) I'}$$

$$\text{avec} \quad \frac{d}{dx} (H(x)) = H', \quad \frac{d}{dy} (I(y)) = I', \quad \frac{d}{dx} (R(x)) = R'$$

$$\frac{d}{dy} (S(y)) = S'$$

$$H(x'_1) = \frac{2}{R(x'_1) + S(y'_0)} - 1$$

ANNEXE D

CONDITIONS DE RÉGULARITÉ DE LA SURFACE LIMITE

Le domaine élastique, défini comme intersection des divers domaines correspondant à des couples de plans parallèles, est convexe (chaque domaine élémentaire étant convexe) mais la surface limite $S(t)$, dont la variation est décrite par les équations II,2.4, n'a pas sa régularité assurée (fig. 38).

Certains plans ($\pi(t)$, fig. 38) peuvent, au cours de leur translation, se "détacher" de la surface limite proprement dite ($S(t) = \bar{D}(t) - D(t)$) et devenir tangents à une "surface parasite" $S_c(t)$, enveloppe d'une partie des plans $\pi(S(t))$ réduite éventuellement à un point).

Un point anguleux se forme alors sur $S(t)$ et la normale en ce point n'est plus définie de façon univoque.

Le calcul de $\bar{d}\vec{\sigma}^p$ et de $S(t + dt)$ resterait cependant possible en remplaçant $\pi(t)$ par le plan $\omega(t)$ parallèle passant par le point anguleux $\vec{\sigma}(t)$, et en prenant comme normale soit la direction de $\bar{d}\vec{\sigma}$ ($\bar{d}\vec{\sigma}$ à l'intérieur du "cône des normales"), soit la normale "la plus proche" de $\bar{d}\vec{\sigma}$ ($\vec{n}$ telle que $\vec{n} \times \bar{d}\vec{\sigma}$ soit minimal, $\bar{d}\vec{\sigma}$ en dehors du "cône des normales"), (fig. 39).

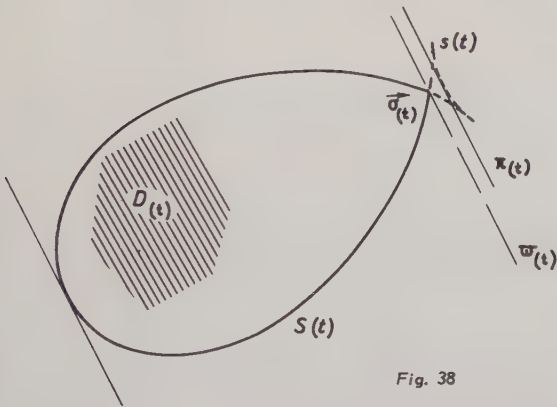


Fig. 38

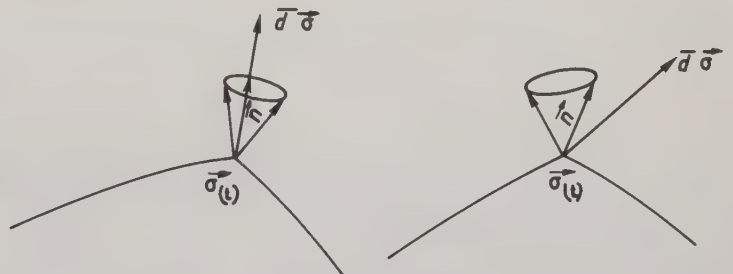


Fig. 39

Nous imposerons cependant aux fonctions ℓ certaines conditions qui entraîneront, dans la plupart des cas simples de chargement, la régularité de la surface limite.

Plaçons-nous dans une section de $S(t)$ par un plan du sous-espace des déviateurs passant par $\vec{n}$, normale extérieure à $S(t)$ en $\vec{\sigma}(t)$. Soient $O\vec{X}$ et $O\vec{Y}$ des axes respectivement parallèle et perpendiculaire à $\vec{n}$, (fig. 40).

L'équation tangentielle de cette section s'écrit :

$$X \cos c + Y \sin c = h'(c, \mathbb{E})$$

d'où, en dérivant par rapport à c , et en séparant les deux inconnues

$$\begin{cases} X \cos c + Y \sin c = h' \\ -X \sin c + Y \cos c = \frac{\partial h'}{\partial c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_{(c, \mathbb{E})} = h' \cos c - \sin c \frac{\partial h'}{\partial c} \\ Y_{(c, \mathbb{E})} = h' \sin c + \cos c \frac{\partial h'}{\partial c} \end{cases}$$

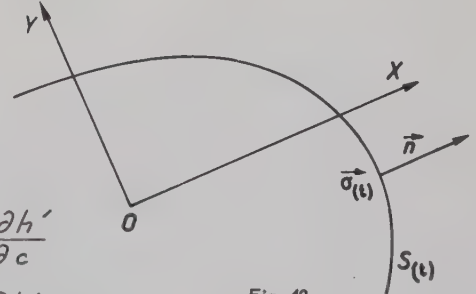


Fig. 40

et alors, $X(c, \mathbb{E})$ et $Y(c, \mathbb{E})$ étant les coordonnées d'un point de l'enveloppe :

$$\frac{\partial X(c, \mathbb{E})}{\partial c} = -\sin c \left(h' + \frac{\partial^2 h'}{\partial c^2} \right)$$

$$\frac{\partial Y(c, \mathbb{E})}{\partial c} = \cos c \left(h' + \frac{\partial^2 h'}{\partial c^2} \right)$$

et nous chercherons à vérifier :

$$h' + \frac{\partial^2 h'}{\partial c^2} \neq 0$$

soit avec

$$\bar{d}h' = \ell(h, h', h_a, h'_a, c) \bar{d}h$$

$$\int_{(\Sigma)} \left(\ell_{(t)} + \frac{\partial^2 \ell_{(t)}}{\partial c^2} \right) \bar{d}h_{(t)} > -h'_0 - \frac{\partial^2 h'_0}{\partial c^2} \quad h'_0 = h(t=0)$$

$\int_{(\Sigma)}$ désignant l'intégrale le long du chemin de contrainte (Σ)

$$t=0: h'_0 = h_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h'_0}{\partial c^2} = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\int_{(\Sigma)} \left(\ell_{(t)} + \frac{\partial^2 \ell_{(t)}}{\partial c^2} \right) \bar{d}h_{(t)} > -h_0.$$

Nous nous placerons dans le cas où f est sensiblement constante le long de la surface limite avec $|f| < 1$, alors il est possible de trouver des conditions suffisantes assurant la régularité de $S_{(t)}$ pour des longueurs de (Σ) inférieures à une quantité fixée L .

Premier modèle :

$$\begin{cases} \ell = \ell^{\bar{1}}(c, h) & c \leq \pi/2 \\ \ell = \ell^{\bar{1}}(\pi - c, h) & \pi/2 \leq c \leq \pi \end{cases} \quad \begin{cases} f \text{ constant} \\ |f| < 1 \end{cases}$$

$$\left| \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial^2 \ell^{\bar{1}}}{\partial c^2} + \ell^{\bar{1}} \right) dh \right| < \int_{(\Sigma)} \left| \frac{\partial^2 \ell^{\bar{1}}}{\partial c^2} + \ell^{\bar{1}} \right| \bar{d}h$$

soit :

$$\ell^{\bar{1}}(c, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(c) \frac{h^n}{n!} \quad \begin{cases} \tilde{h}_0 = \inf_{\Sigma} h \\ H = \sup_{\Sigma} h \end{cases}$$

$$\text{alors :} \quad \int_{(\Sigma)} \left| \frac{\partial^2 \ell}{\partial c^2} + \ell \right| \bar{d}h < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{n+1} - \tilde{h}_0^{n+1}}{(n+1)!} \left| \varphi_n(c) + \frac{\partial^2 \varphi_n(c)}{\partial c^2} \right|.$$

Il suffit donc d'imposer

$$\forall c \quad \left| \frac{\partial^2 \varphi_n(c)}{\partial c^2} + \varphi_n(c) \right| < \frac{h_0(n+1)!}{H^{n+1} - \tilde{h}_0^{n+1}} \times \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\text{alors nous aurons :} \quad \left| \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial^2 \ell^{\bar{1}}}{\partial c^2} + \ell^{\bar{1}} \right) \bar{d}h \right| < h_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = h_0.$$

Second modèle :

$$\ell = \ell^{\bar{2}}(c, f(h'_a, h')) \quad \ell^{\bar{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(c)}{n!} f^n(h'_a, h').$$

Un calcul identique montre qu'il suffit d'imposer :

$$\left| \frac{\partial^2 \phi_n(c)}{\partial c^2} + \phi_n(c) \right| < \frac{h_0 n!}{(H - \tilde{h}_0) \times 2^{n+1}}.$$

Régularité $c = \pi/2$ rd. (premier modèle):

A une variation $\bar{d}h$ correspond une variation des coordonnées du point caractéristique d'une tangente donnée :

$$\begin{cases} dX = \cos c \cdot \ell \cdot \bar{d}h - \sin c \cdot \frac{\partial \ell}{\partial c} \cdot \bar{d}h \\ dY = \sin c \cdot \ell \cdot \bar{d}h + \cos c \cdot \frac{\partial \ell}{\partial c} \cdot \bar{d}h \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \ell = \ell^{\bar{}}(c, h) & \text{pour } c \leq \pi/2 \text{ rd} \\ \ell = \ell^{\bar{}}(\pi - c, h) f(h', h'_a) & \text{pour } c \geq \pi/2 \text{ rd}. \end{cases}$$

ou

Pour $c = \pi/2 \text{ rd.}$, nous avons donc :

$$\begin{cases} dX = - \frac{\partial \ell^{\bar{}}}{\partial c} (\pi/2) \bar{d}h = - \left(\frac{\partial \ell^{\bar{}}(\pi - c) f}{\partial c} \right) \bar{d}h \\ dY = \ell^{\bar{}}(\pi/2) \bar{d}h = \ell^{\bar{}}(\pi/2) f \bar{d}h. \end{cases}$$

La seconde égalité donne :

$$\ell^{\bar{}}(\pi/2) = \ell^{\bar{}}(\pi/2) f(h', h'_a)$$

d'où : soit $f \equiv 1$, soit $\ell^{\bar{}}(\pi/2) = 0$.

Alors, la première égalité devient :

$$\frac{\partial \ell^{\bar{}}}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial c} \cdot \ell^{\bar{}}(\pi/2) - \frac{\partial \ell^{\bar{}}}{\partial c} \cdot f$$

d'où (comme soit $f \equiv 1$, soit $\ell^{\bar{}}(\pi/2) = 0$) :

$$\frac{\partial \ell^{\bar{}}}{\partial c} (\pi/2) = - \frac{\partial \ell^{\bar{}}}{\partial c} (\pi/2) \cdot f \rightarrow \begin{cases} f = -1 \\ \frac{\partial \ell}{\partial c} (\pi/2) = 0. \end{cases}$$

Il est possible de grouper en un tableau les différentes conditions à imposer aux fonctions f et $\ell^{\bar{}}$, en se souvenant que $\ell^{\bar{}}$ est paire en c , égale à 1 pour $c = 0$.

Cas	f	$\ell(0)$	$\ell(\pi/2)$	$\left(\frac{\partial \ell}{\partial c}\right)_{c=0}$	$\left(\frac{\partial \ell}{\partial c}\right)_{c=\pi/2}$
1er	1	1	quelconque	0	0
2ème	-1	1	0	0	quelconque
3ème	quelconque	1	0	0	0

$\ell \equiv 1$
 cas "isotrope"
 $\ell = \cos c$
 cas "écrouissage cinématique"

Si $\ell \equiv 1$, le premier cas correspond à un écrouissage isotrope, le second (si $\ell = \cos c$) correspond à un écrouissage par translation (fig. 41).

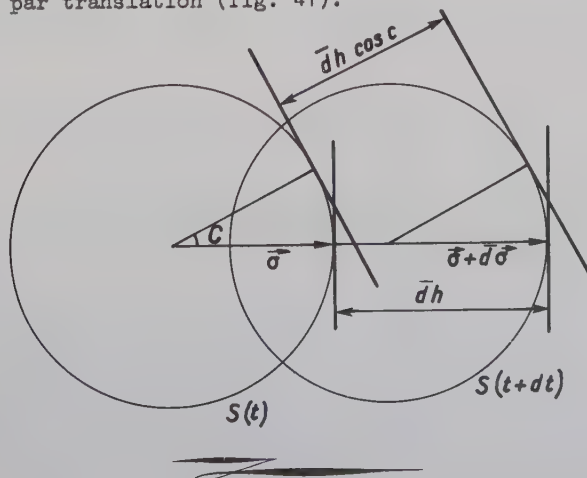


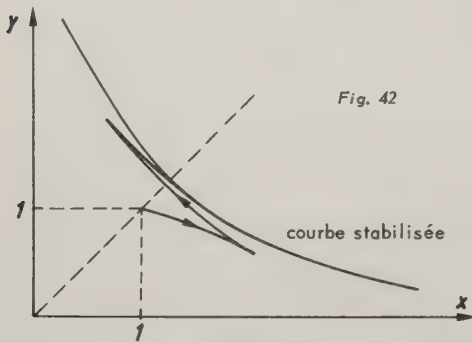
Fig. 41

ANNEXE E

STABILISATION DES CYCLES

Nous allons chercher dans quelles conditions le moule proposé conduit à une stabilisation, expérimentalement obtenue [25].

Dans les cas des duralumins D23 et D26, 14 et 16, nous avons vu que sous l'action d'un chargement alterné (par exemple, pour des cycles de contrainte ou pour des cycles de déformation) le point représentatif de l'état des contraintes limites, le long de l'axe de chargement, tend, par "valeurs inférieures", vers une courbe limite correspondant au cas :



$$f(x, y) \times f(y, x) = 1 \quad (\text{fig. 42}).$$

Lorsque la courbe stabilisée est atteinte, h_a devient une fonction de h ($h = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$, $h_a = g(h)$).

D'autre part, si :

$$\ell^1(h, c = \pi/2 \text{ rd}) = 0$$

en raison des conditions de raccordement ou si

$$\ell^2(f(h'_a, h'), \pi/2) \longrightarrow 0$$

quand le nombre de cycles augmente, alors les valeurs de h' correspondant à $c = \pi/2$ deviennent constantes.

La fonction d'écrouissage $\mu(h, \tilde{h})$ devient une fonction de h uniquement :

$$\mu(h, \tilde{h}) \longrightarrow \mu(h).$$

Nous avons alors :

$$\vec{d}|\vec{\varepsilon}^P| = \mu(h) dh$$

$$h = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}.$$

Cycles de contraintes

Appliquons une contrainte alternée $\vec{\sigma}(t) = \vec{\sigma}_0 f(t)$ où $f(t)$ est scalaire, périodique, impaire et continue

$$f(t + nT) = f(t) = f(-t) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(avec μ est définie sur l'ensemble des valeurs de h , soit $\tilde{\mu}$ un prolongement de μ sur $\mathbb{R}$ (avec $\tilde{\mu}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$)).

Orientons les contraintes et les déformations plastiques (par exemple, positives pour des tractions lors de cycles en traction-compression) et posons :

$$Y(\sigma) = \int_0^\sigma \tilde{\mu}(\sigma) d\sigma \quad \tilde{\mu} \text{ positive, } Y(\sigma) \text{ bijective.}$$

Supposons $\tilde{\mu}$ paire, alors

$$d\varepsilon^P = \mu(h) dh = (\tilde{\mu}(\sigma) d\sigma, \text{ ou } 0).$$

La loi d'écrouissage devient :

$$\begin{cases} d\varepsilon^P = dY & \text{pour } Y = Y_{\text{LIMITE}}^+ = Y(\sigma_{\text{LIMITE}}^+), dY > 0 \\ d\varepsilon^P = 0 & \text{pour } Y < Y_{\text{LIMITE}}^+, \text{ et } Y > Y_{\text{LIMITE}}^- \\ d\varepsilon^P = dY & \text{pour } Y = Y_{\text{LIMITE}}^-, dY < 0. \end{cases}$$

Soit $y = g(x)$ l'équation de la courbe stabilisée, cette équation devient $Y(y) = G(Y(x))$ après changement de variables.

A l'extremum de la contrainte λ correspond une valeur λ' de la contrainte limite limite associée $\lambda' = g(\lambda)$ (fig. 43).

Au cours de l'écroutissage, la contrainte limite associée σ_a tend, en module, vers λ' par valeurs inférieures et $Y(\sigma_a)$ tend de la même façon vers $Y(\lambda')$, (fig. 43).

Dans les axes Y, ε il est alors facile de voir que le cycle se stabilise dès que la courbe limite est atteinte et que la largeur du cycle décroît au cours de cette stabilisation. Par suite de la correspondance entre σ et Y il en est de même dans les axes σ, ε , (fig. 44).

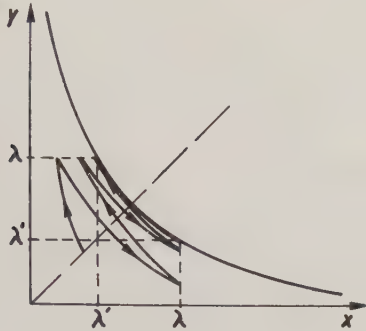


Fig. 43

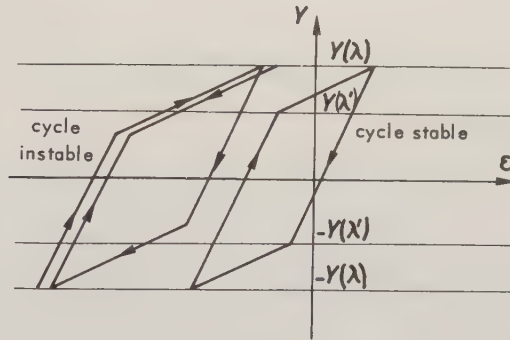


Fig. 44

Cycles de déformations plastiques

$y = g(x)$ étant l'équation de la courbe stabilisée (avec $y = g(x)$), on a :

$$\begin{cases} y = g(x) \\ g(y) = x \end{cases} \longrightarrow y - g(y) = g(x) - x.$$

$$\text{Soit } U = x - g(x) + k/2 = \hat{h}(x)$$

et soit $V = y - g(y) + k/2 = \hat{h}(y)$ $\hat{h}$ définie sur l'ensemble des valeurs de h .

Supposons que $\hat{h}$ possède un prolongement impair $\tilde{h}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Nous avons alors : } V - k/2 = -U + k/2$$

$$\text{d'où : } U + V = k.$$

Nous choisirons k de façon à ce que, lorsque le couple (x, y) décrit la courbe stabilisée, le couple (U, V) reste dans le quart de plan "positif" (l'origine reste, par rapport à la variable $h(x)$, dans la surface limite).

La relation $U + V = k$ signifie que dans les axes $(\varepsilon, \tilde{h}(\sigma))$ la largeur de la surface limite reste constante (écroutissage par translation). Soit $\tilde{g}$ un prolongement de $\tilde{g}$ sur $\mathbb{R}$.

Si nous supposons $\tilde{g}'(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ alors $\tilde{h}'(x) = 1 - \tilde{g}'(x)$ est positive et la fonction h est une application bijective de l'ensemble des valeurs de x sur l'ensemble des valeurs de $\tilde{h}(x)$. Tous les résultats obtenus dans les axes $(\varepsilon, \tilde{h}(\sigma))$ sont directement transposables dans les axes (ε, σ) .

Soit $\Sigma = \tilde{h}(\sigma)$ comme $d\varepsilon^p = (\tilde{\mu}(\sigma) d\sigma, \text{ ou } 0)$, nous avons

$$d\varepsilon^p = (M(\Sigma) d\Sigma, \text{ ou } 0). \quad M(\Sigma) \text{ fonction paire.}$$

Construisons la courbe $V(u) = \int_0^u M(\xi) d\xi$, $V(u)$ impaire et la suite des points caractéristiques d'un cycle :

R_n limite +, S_n maximum, T_n limite - et U_n minimum, (fig. 45).

Soient x_n et y_n les coordonnées de R_n ($x_n = -\lambda$) et x_{n+1}, y_{n+1} celles de R_{n+1} . Nous allons démontrer que le point R_n tend vers une limite R . Il en sera alors de même des points S_n, T_n et U_n dont les coordonnées se déduisent de celles de R_n :

$$R_n : -\lambda, y_n$$

$$S_n : \lambda, V^{-1}(V(y_n) + 2\lambda)$$

$$T_n : -\lambda, V^{-1}(V(y_n) + 2\lambda) - k$$

$$U_n : -\lambda, V^{-1}[V(V^{-1}(V(y_n) + 2\lambda)) - k] - 2\lambda]$$

et

$$R_{n+1} : -\lambda, V^{-1}[V(V^{-1}(V(y_n) + 2\lambda)) - k] - 2\lambda] + k$$

d'où

$$y_{n+1} = V^{-1}[V(V^{-1}(V(y_n) + 2\lambda)) - k] - 2\lambda] + k$$

et en posant

$$g(u) = V^{-1}(V(u) + 2\lambda)$$

$$g(y_{n+1} - k) = g(y_n) - k$$

$$y_{n+1} = k + g^{-1}(g(y_n) - k)$$

nous avons pour g'

$$g'(u) = \frac{V^{-1}'(V(u) + 2\lambda)}{V^{-1}'(V(u))}$$

$$V'(x) = M(x) > 0$$

$$g' > 0$$

M est une fonction paire qui est croissante quand x est positif et il existe une valeur de z telle que

$$(V^{-1})'(z + 2\lambda) = (V^{-1})'(z) :$$

$$z_0 + 2\lambda = -z_0 \quad z_0 = -\lambda \quad (\text{fig. 46}).$$

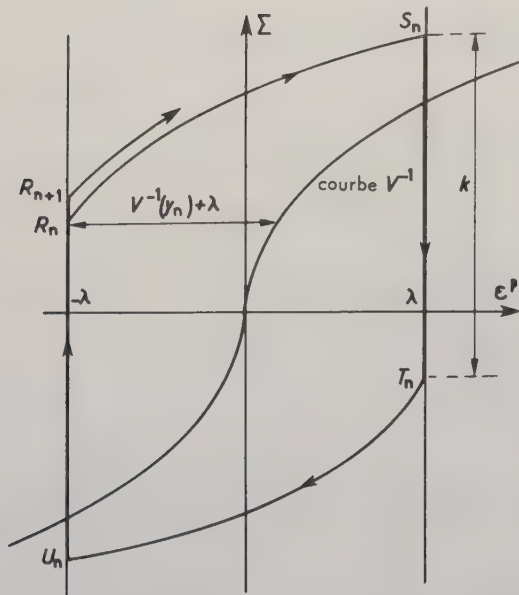


Fig. 45

donc, en résumé :

$$\begin{cases} u = u_0 \longrightarrow g' = 1 \\ u > u_0 \longrightarrow g' < 1 \\ u < u_0 \longrightarrow g' > 1 \end{cases} \quad u_0 = -V^{-1}(\lambda).$$

Etude du signe de g''

$$g''(u) = \frac{(V^{-1})''(V(u) + 2\lambda)}{[(V^{-1})'(V(u))]^2} - \frac{(V^{-1})'(V(u) + 2\lambda)(V^{-1})''(V(u))}{[(V^{-1})'(V(u))]^3}$$

d'où

$$\text{sign. } g'' = \text{sign. } \left(\frac{(V^{-1})''(V(u) + 2\lambda)}{(V^{-1})'(V(u) + 2\lambda)} - \frac{(V^{-1})''(V(u))}{(V^{-1})'(V(u))} \right)$$

$$\text{sign. } g'' = \text{sign. } \left\{ \left[\frac{d}{dx} \text{Log } (V^{-1})'(x) \right]_{V(u)}^{V(u) + 2\lambda} \right\}$$

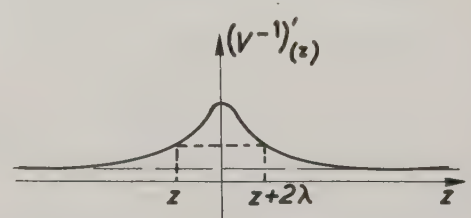


Fig. 46

A cette valeur de z correspond une valeur u_0 de u :

$$u_0 = V^{-1}(z_0) = V^{-1}(-\lambda) = -V^{-1}(\lambda).$$

Pour $u = u_0$ nous avons $g'(u_0) = 1$.

Soit $u > u_0 : z > z_0$ (V^{-1} croissante)

$$\text{d'où} \quad (V^{-1})'(z) > (V^{-1})'(z + 2\lambda)$$

$$\text{et } g' < 1$$

Il nous suffit donc, pour que g'' soit négatif, d'imposer à la fonction $\log((V^{-1})'(x))$ d'être concave, concavité tournée vers les y négatifs.

Coupons la courbe $w = g(u)$ par la droite $w = u + c$ (fig. 47).

Selon les valeurs de c , le nombre de points d'intersection est différent mais nous pouvons démontrer que :

- $N(c)$, ce nombre est une fonction décroissante de c ,
- que l'on a, soit $N(c) = 0$, soit $N(c) = 2$ et que dans ce cas les abscisses des points d'intersection, soient u_1 , et u_2 , sont telles que $u_1 < u_0 < u_2$ où u_0 est l'abscisse telle que $g'(u_0) = 1$, (fig. 47).

Comme $g'' < 0$, nous avons $N(c) = 0$ ou 2.

Les deux points d'intersection ne peuvent être à "droite" (respectivement à "gauche") de u_0 sinon :

$$\int_{u_1}^{u_2} g'(u) du \leq \int_{u_1}^{u_2} \sup_{[u_1, u_2]} g'(u) du < u_2 - u_1.$$

Et comme u_1 et u_2 sont les abscisses des intersections de $g(u)$ et $u + c$:

$$\int_{u_1}^{u_2} g'(u) du = g(u_2) - g(u_1) = u_2 + c - u_1 - c = u_2 - u_1,$$

d'où $u_2 - u_1 < u_2 - u_1$, ce qui est impossible.

Lorsque c décroît, $N(c)$ croît car sinon : soit la courbe représentative de la fonction $w = g(u)$ est fermée (impossible g étant une fonction, donc uniforme), soit elle possède une asymptote commune aux deux branches (impossible car $g'(u)$ est soit supérieure à 1, $u_0 > u$, soit inférieure à 1, $u > u_0$ et $g''(u)$ est inférieure à zéro).

$\ell(c)$ longueur de la sécante est une fonction décroissante de c (définie pour $c > c_0$, $w = u + c_0$ tangente à $w = g(u)$).

Soient M_1, M_2 la sécante correspondant à $w = u + c$ et M'_1, M'_2 celle correspondant à $w = u + c + dc$, (fig. 48).

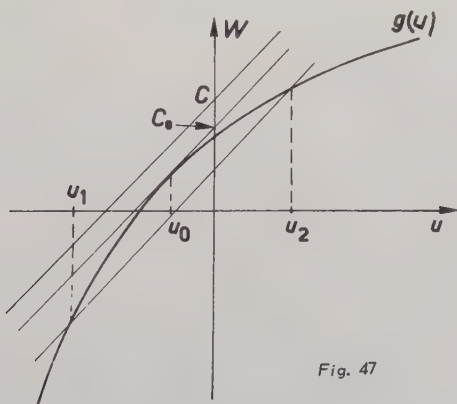


Fig. 47

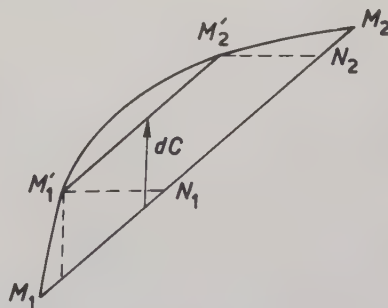


Fig. 48

Prenons $dc > 0$.

Soient N_1 et N_2 les projections, parallèlement à l'axe des u , de M'_1 et M'_2 sur M_1M_2 , nous avons :

$$N_2M_2 = \sqrt{2} \times (\text{ordonnée de } M_2 - \text{ordonnée de } M'_2)$$

$$N_2M_2 = \sqrt{2} \int_{u'_1}^{u_2} g'(u) du > 0$$

et $N_1M_1 > \sqrt{2} dc = N_1$ - projection de M'_1 sur M_1M_2 (parallèlement à l'axe des w), d'où $d\ell < -\sqrt{2} dc < 0$.

Donc lorsque c décroît, ℓ augmente.

$$\ell(c) = 0 \quad \text{et} \quad \ell(c) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad c \rightarrow -\infty.$$

Il existe, par conséquent, une valeur de c et une seule telle que $\ell(c) = \sqrt{2} k$. Soit

y_0 l'abscisse du point d'intersection de droite de cette sécante particulière, on a :

$$g(y_0 - k) = g(y_0) - k$$

et y_0 est la solution unique de l'équation $g(y - k) = g(y) - k$ ou $y = g^{-1}(g(y) - k) + k = q(y)$

la pente de $q(y)$ au point y_0 est égale à :

$$\frac{dq}{dy} = \frac{g'(y_0)}{g'(g^{-1}(g(y_0) - k))} = \frac{g'(y_0)}{g'(y_0 - k)}$$

$\frac{\partial q}{\partial y}$ est donc inférieure à 1, et supérieure à zéro, en y_0 car :

$$\begin{aligned} y_0 > u_0 &\longrightarrow g'(y_0) < 1 \\ y_0 - k < u_0 &\longrightarrow g'(y_0 - k) > 1 \end{aligned} \longrightarrow \frac{g'(y_0)}{g'(y_0 - k)} < 1.$$

La solution de l'itération définie par $y = q(y)$ est alors unique, l'itération converge vers y_0 quelle que soit la valeur initiale donnée à y .

Donc les coordonnées de R_n tendent vers $(-\lambda, y_0)$, celles de S_n , T_n et U_n tendent vers les coordonnées correspondantes.

Le cycle de déformations plastiques tend vers un cycle stabilisé.

Cycles de déformations "totales"

Pour ce type de cycles deux cas particuliers ont pu être traités.

Cas $g(x) = -x + k$

Alors aucun changement dans l'échelle des contraintes n'est nécessaire pour se ramener à un "écrouissage par translation" ($f(x, y) = -1$) et, en remplaçant dans le raisonnement précédent 2λ par $2\lambda - \frac{k}{E}$ et $\tilde{\mu}$ par la fonction m , telle que $d\varepsilon = m(\sigma) d\sigma$, nous aboutissons à la conclusion semblable : les cycles de déformations totales (cycles symétriques comme dans tout ce qui précède) se stabilisent.

Cas $\tilde{\mu}(\sigma) = \tilde{\mu}$ constant

Nous avons :

$$d\varepsilon^P = \tilde{\mu} d\sigma$$

et $d\varepsilon^P = \tilde{\lambda} d\sigma$ d'où $d\varepsilon = (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) d\sigma$ dans la "zone plastique", soit $\Sigma = (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \cdot \sigma$ alors dans les axes (ε, Σ) les coordonnées de la succession des points caractéristiques d'un cycle sont : $(d\varepsilon^0 = d\Sigma/E')$, (fig. 49).

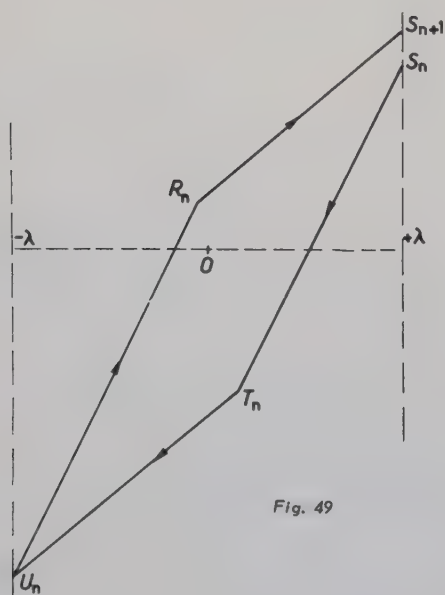


Fig. 49

$$S_n : \lambda, y_n$$

$$T_n : \lambda - (g(y_n) + y_n)/E', -g(y_n)$$

$$U_n : -\lambda, -g(y_n) - 2\lambda + (g(y_n) + y_n)/E' = \xi_n$$

$$R_n : -\lambda + (g(-\xi_n) - \xi_n)/E', g(-\xi_n)$$

$$S_{n+1} : +\lambda, +g(-\xi_n) + 2\lambda - (g(-\xi_n) - \xi_n)/E' = y_{n+1}$$

$$\text{avec } \xi_n = g(y_n) \left(\frac{1}{E'} - 1 \right) - 2\lambda + \frac{y_n}{E'}$$

$$\text{soit : } G(u) = g(-u) \left(1 - \frac{1}{E'} \right) + 2\lambda + \frac{u}{E'}$$

$$\text{alors : } \xi_n = -G(-y_n) \text{ et } y_{n+1} = G(\xi_n)$$

$$y_{n+1} = G(-G(-y_n))$$

$$\text{avec } G'(x) = -g'(-x) \left(1 - \frac{1}{E'} \right) + \frac{1}{E'}$$

comme :

$$g'(x) < 0, \forall x, \quad g''(x) > 0 \quad g'(x) \geq -1$$

on a :

$$G'(x) > \frac{1}{E'} > 0 \quad G''(x) = g''(-x) \left(1 - \frac{1}{E'} \right) > 0.$$

Tous les points tels que $G(-y) = -G^{-1}(y)$ (abscisses des intersections des courbes $-G(-x)$ et $G^{-1}(x)$, ordonnées des intersections de la courbe G avec la courbe symétrique par rapport à la seconde bissectrice) sont solutions.

La courbe $G(x) = y$ coupe la 2ème bissectrice

- Lorsque $x \rightarrow -\infty$ il existe $\alpha : g(-x) < \alpha$ d'où

$$G(x) < \alpha \left(1 - \frac{1}{E'}\right) + 2\lambda + \frac{x}{E'} \rightarrow -\infty$$

- et si $x > -k$ alors $g(-x) > 2k + x$ (k étant tel que $g(k) = k$, $g'(k) = -1$, (fig. 50).

donc

$$G(x) > (2k - x) \left(1 - \frac{1}{E'}\right) + 2\lambda + x \left(\frac{1}{E'} + 1\right)$$

$$x + G(x) > 2(k + x) + 2\left(\lambda - \frac{k}{E'}\right) > 2\left(\lambda - \frac{k}{E'}\right)$$

- si $\lambda > \frac{k}{E'}$, alors il existe des valeurs de x telles que

$G(x) > -x$ et comme $G(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$ ($-x \rightarrow +\infty$)

il existe des valeurs de x telles que $G(x) < -x$ et $G(x) = y$

coupe $y = -x$, $G''(x)$ étant positive, $G'(x)$ négative, le nombre de points d'intersection est un ;

-- si $\lambda < k/E'$ il est facile de voir que ce cas correspond à des cycles qui se stabilisent en une "droite élastique", (fig. 51).

Pour $x < -k$ ($-x > k$) : $|g'(-x)| < 1 \rightarrow G'(x) < 1$
 $x > -k$: $|g'(-x)| > 1 \rightarrow G'(x) > 1$.

D'où le schéma suivant qui fournit au moins une solution à l'équation $y = G(-G(-y))$

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} = G'(-G(-y_n)) \times G'(-y_n) < 1 \text{ si}$$

$$G'(-G(-y_n)) < 1 \text{ et } G'(-y_n) < 1$$

c'est-à-dire

$$-G(-y_n) < -k \text{ et } -y_n < -k.$$

Soit au point d'intersection $G(y) = -y$ (fig. 51 bis).

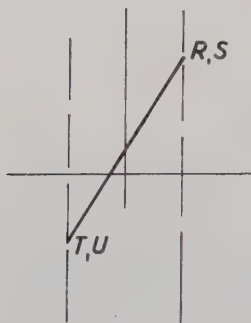


Fig. 51

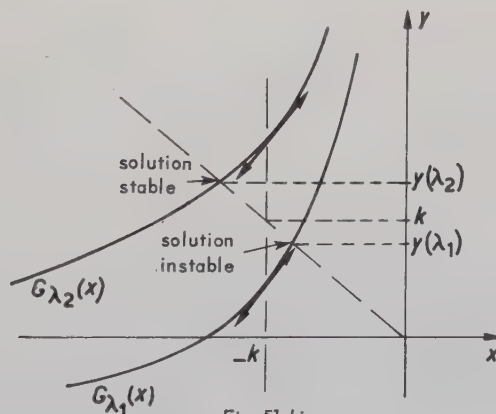


Fig. 51 bis

On a donc stabilité pour :

$$g(-x) \left(1 - \frac{1}{E'}\right) + 2\lambda + \frac{x}{E'} = -x > k$$

c'est-à-dire $\lambda > \lambda_0$ avec

$$g(k) \left(1 - \frac{1}{E'}\right) + 2\lambda_0 + \frac{-k}{E'} = k, \quad \lambda_0 = k/E'$$

et l'"existence" d'un cycle plastique entraîne la stabilité du point solution (dans un voisinage).

ANNEXE F

EXTENSION AU FLUAGE

Nous postulons une non-influence de la contrainte moyenne et nous nous placerons dans l'espace des déviateurs Σ_D .

Soit volume (D) un volume défini dans cet espace ($\forall D \subset \Sigma_D$).

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des surfaces de cet espace, surfaces continues telles qu'il soit possible de leur associer un volume intérieur.

Nous définissons sur $\mathcal{S}$ une distance en posant :

$$d(S_0, S_1) = \text{volume} ((D_0 \cup D_1) \cap ((D_0 \cap D_1)))$$

$$S_0, S_1 \in \mathcal{S} \quad (S \rightarrow D)$$

est bien une distance sur $\mathcal{S}$:

$$d(S_0, S_1) = d(S_1, S_0) \geq 0$$

$$d(S_0, S_1) = 0 \iff S_0 = S_1$$

et

$$d(S_1, S_2) \leq d(S_0, S_1) + d(S_0, S_2)$$

car :

$$d(S_1, S_2) = \text{volume} ((D_1 \cup D_2) \cap ((D_1 \cap D_2))) = \text{volume} (A)$$

$$d(S_0, S_1) + d(S_0, S_2) \geq \text{volume} [((D_0 \cup D_2) \cap ((D_0 \cap D_2))) \cup ((D_0 \cup D_1) \cap ((D_0 \cap D_1)))]$$

$$\geq \text{volume} (B)$$

avec

$$\text{vol.}(D \cup D') \leq \text{vol.}(D) + \text{vol.}(D')$$

$$B = ((D_0 \cup D_1) \cap C(D_0 \cap D_1)) \cup ((D_0 \cup D_2) \cap C(D_0 \cap D_2))$$

$$= (D_0 \cup D_1 \cup D_2) \cap (C(D_0) \cup C(D_1) \cup C(D_2))$$

$$= (D_0 \cup D_1 \cup D_2) \cap ((D_0 \cap D_1 \cap D_2))$$

et

$$A = (D_1 \cup D_2) \cap ((D_1 \cap D_2))$$

mais

$$D_0 \cup D_1 \cup D_2 \supset D_1 \cup D_2$$

et

$$D_0 \cap D_1 \cap D_2 \subset D_1 \cap D_2 \longrightarrow C(D_0 \cap D_1 \cap D_2) \supset C(D_1 \cap D_2)$$

d'où

$$A \subset B \longrightarrow \text{vol.}(A) \leq \text{vol.}(B) \longrightarrow d(S_1, S_2) \leq d(S_0, S_1) + d(S_0, S_2).$$

Soit maintenant $\mathcal{N}$ l'ensemble des couples (vitesses de déformation "plastique" ($|\dot{\epsilon}^p|$), distances de deux surfaces de $\mathcal{S}$ ($d(S_0, S_1)$) "non détectables" par les moyens de mesure actuels.

$$\mathcal{N} = \{(\eta, \mu) \mid 0 < \eta < \eta_0, 0 < \mu < \mu_0\}$$

soit

$$N = \{(\eta, \mu) \mid 0 \leq \eta \leq \eta_0\}, \quad N \subset \bar{\mathcal{N}}$$

et soit N' ($N' \subset N$) l'ensemble des couples (η, μ_0) tels que :

- la surface $S(t_0)$ frontière de l'ouvert $D(t_0)$

- ($D(t_0)$) tel que : quel que soit le trajet $\vec{S}(t) \in D(t_0)$, $\forall t \geq t_0$ alors $|\dot{\epsilon}^p(t)| < \eta$

- $S(t_0) \in \mathcal{S}$ $D(t_0) \neq \emptyset$ ensemble vide
 - et $d(S(t'), S(t_0)) < \mu_0 \quad \forall t' \geq t_0 \quad \forall \vec{s}(t') \in D(t_0)$
 ($S(t')$ étant, à l'instant t' , définie comme $S(t_0)$ par $|\vec{\epsilon}_{(t')}^P| < \eta$).

Si cet ensemble N' n'est pas vide, nous choisirons comme couple servant à la définition de $S(t)$ le couple :

$$(\eta', \mu_0) \text{ avec } \eta' = \sup(\eta \mid (\eta, \mu_0) \in N').$$

Cette définition mathématique nous permet de déterminer un domaine $D(t)$ tel que, pour tout trajet $\vec{s}$ "intérieur" à $D(t)$, "l'écrouissage" reste sensiblement constant.

Nous donnerons à $S(t)$ et $D(t)$ des rôles équivalents à ceux joués par la surface limite et le domaine élastique dans le cas de déformations de type plastique, mais contrairement à ce qui se passait jusqu'à présent, le point $\vec{s}(t)$ peut maintenant ne plus être dans $\bar{D}(t)$.

Soit $h(t)$ la distance de $\vec{s}(t)$, point de Σ_D , à $\bar{D}(t)$:

$$\underline{h}(t) = \inf_{\vec{s}' \in \bar{D}(t)} |\vec{s}(t) - \vec{s}'|$$

$\vec{s}_e(t)$ Si $S(t)$ est convexe, alors il existe un point et un seul de $\bar{D}(t)$ qui vérifie, (soit ce point) :

$$|\vec{s}_{(t)} - \vec{s}_e(t)| = \underline{h}(t)$$

et si $\vec{s}_{(t)} \in \bar{D}(t) \rightarrow \vec{s}_e(t) = \vec{s}_{(t)}, \underline{h}(t) = 0$

si $\vec{s}(t) \notin \bar{D}(t) \rightarrow \vec{s}_e(t) \in S(t)$

soit $\vec{h}(t) = \vec{s}_{(t)} - \vec{s}_e(t) \quad \underline{h}(t) = |\vec{h}(t)|, \vec{n} = \frac{\vec{h}}{h}$.

Pour $\underline{h}(t) \neq 0$ nous allons supposer que la déformation "plastique" est à chaque instant de vitesse parallèle à $\vec{h}(t)$ et fonction de $\vec{s}(t)$ et $\vec{s}_e(t)$ uniquement :

$$\vec{\epsilon}_{(t)}^P = \vec{n}_{(t)} k(\vec{s}_{(t)}, \vec{s}_e(t)) \quad k \text{ nulle pour } \vec{s}_e(t) = \vec{s}_{(t)}$$

et qu'il en est de même pour $\dot{\vec{s}}_e(t)$ ($\vec{s}_{(t)} \in \bar{D}(t)$) :

$$\dot{\vec{s}}_e(t) = \vec{n}_{(t)} g(\vec{s}_{(t)}, \vec{s}_e(t)) \text{ pour } \vec{s}_{(t)} \text{ normal à } S(t)$$

$$(\vec{s}(t) \in \bar{D}(t) \rightarrow \vec{s}_e(t) = \vec{s}_{(t)})$$

la surface $S(t)$ se déformant selon des lois identiques à celles du cas plastique (le plan π étant le plan tangent en $\vec{s}_e(t)$).

Dans le cas où $\vec{s}_{(t)}$ n'est pas normal à $S(t)$ au déplacement dû à $\vec{s}_{(t)}$ il faut ajouter pour $\vec{s}_e(t)$ un déplacement dû à la variation de la normale à $S(t)$, (fig. 52).

$$\dot{\vec{s}}_e(t) = \vec{n}_{(t)} g(\vec{s}_{(t)}, \vec{s}_e(t)) + \vec{\theta}_{(t)} \cdot (\vec{\theta}_{(t)} \cdot \vec{s}_{(t)}) \cdot \frac{\rho(t)}{h(t) + \rho(t)}.$$

$\vec{\theta}_{(t)}$ étant le vecteur tangent à $S(t)$ en $\vec{s}_e(t)$ dans le plan défini par $\vec{s}_{(t)}$, $d(\vec{s}_{(t)})$.

$\rho(t)$ le rayon de courbure de la section de $S(t)$ par ce même plan.

Et pour $\vec{s}(t) \in \bar{D}(t) \quad \dot{\vec{s}}_e(t) = \dot{\vec{s}}(t)$.

Si nous supposons k et g fonction de $|\vec{s}_{(t)}|$

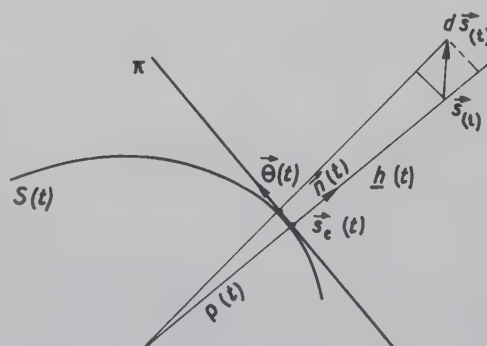


Fig. 52

et $\underline{h}(t)$ uniquement :

$$\dot{\vec{e}}_{(t)}^p = \vec{n}(t) \tilde{k}(|\vec{s}_{(t)}|, \underline{h}(t))$$

$$\vec{s}_{(t)} \notin \bar{D}(t) \quad \vec{s}_e(t) = \vec{n}_{(t)} \tilde{g}(|\vec{s}_{(t)}|, \underline{h}(t)) + \vec{\theta}_{(t)} \cdot (\vec{\theta}_{(t)} \times \vec{s}_{(t)}) \times \frac{\rho(t)}{\underline{h}(t) + \rho(t)}$$

$$\vec{s}(t) \in \bar{D}(t) \quad \vec{s}_e(t) = \vec{s}(t) \quad (\vec{s}_e(t) = s(t))$$

la vitesse de translation du plan π est :

$$\vec{n}(t)(\vec{n}(t) \cdot \vec{s}_e(t)) = \vec{V}_{(\pi, t)}.$$

De cette vitesse nous pouvons déduire les vitesses de translation des autres plans tangents :

$$\vec{V}_{(\pi', t)} = (\vec{V}_{(\pi, t)} \times \vec{n}_{\pi}) \vec{n}_{\pi'} f(h, h_a, h', h'_a, c).$$

Si l'origine reste dans la surface limite, alors pour un chargement simple, $\vec{\sigma}(t) = \lambda(t) \vec{\sigma}_0$ avec λ de signe constant, ces formules se réduisent à :

$$\underline{h}(t) > 0 \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_{(t)}^p = \tilde{k}(\sigma(t), \underline{h}(t)) \\ \dot{\underline{h}}(t) = \dot{\sigma} - \tilde{g}(\sigma(t), \underline{h}(t)) \end{cases}$$

$$\underline{h}(t) = 0 \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_{(t)}^p = 0 \\ \dot{\underline{h}}(t) = 0. \end{cases}$$

Dans des expériences de fluage sous contrainte constante, ces formules nous donnent ($\tilde{k}$ fonction croissante de $\underline{h}$, $\tilde{g}$ fonction positive croissante avec $\underline{h}$), (fig. 53).

Pour $\tilde{k}$ et $\tilde{g}$ croissantes avec σ ces deux cas ne peuvent se produire pour le même matériau que pour $\sigma_1 > \sigma_2$, et correspondent aux deux figures suivantes, (fig. 54).

Dans le premier, la surface $S(t)$ tend vers une position limite ne passant pas par $\vec{s}$, dans le second, cette surface "limite" passe par $\vec{s}$ (ce cas correspondrait, à chaud, au comportement de type plastique observé à froid), (fig. 54).

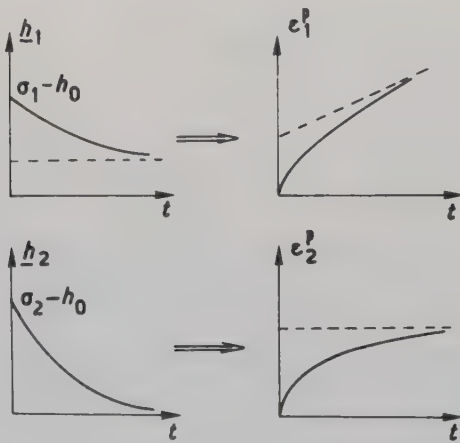


Fig. 53

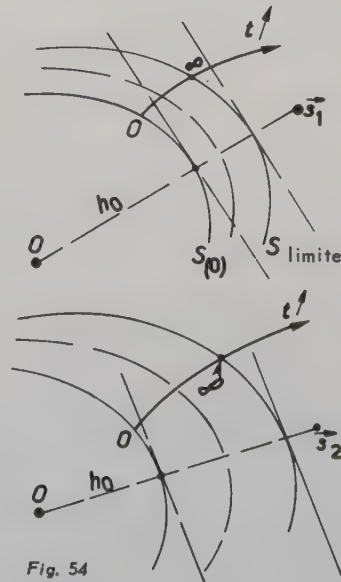


Fig. 54

Soit $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \sigma} = 0$, $\tilde{k}(\sigma, \underline{h}) = \varphi(\sigma) \psi(\underline{h})$.

Plaçons-nous dans le premier cas, $\underline{h}$ au-dessus de l'asymptote :

$$s = Ct^a, t \rightarrow \infty \quad \underline{h} \rightarrow k : \dot{\vec{e}}_{(t)}^p \rightarrow \tilde{k}(\sigma, k) = \varphi(\sigma) \psi(k).$$

Prenons $\psi(k)=1 \quad \dot{\varepsilon}^P_{(t)} \rightarrow \varphi(\sigma)$.

La fonction $\varphi(\sigma)$ est donc déterminée par les pentes des courbes de fluage établi.

Nous avons $\psi(k)=1 \quad \psi(0)=0$.

Prenons $\psi(h) = \frac{h}{k}$ (et $\varphi(\sigma) = \lambda \sigma^n$, éventuellement).

Quand $h \rightarrow k : \tilde{g} \rightarrow 0$ soit $\tilde{g}(h(t)) = \alpha(h-k)$.

Alors pour $\sigma_{(t)}$ quelconque
$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^P_{(t)} = \varphi(\sigma) \frac{h(t)}{k} \\ \dot{h}(t) = \dot{\sigma}_{(t)} - \alpha(h(t)-k) \end{cases} \quad \text{avec } \dot{\sigma} = 0 \text{ en fluage.}$$

La fonction $\varphi(\sigma)$, les coefficients α et k peuvent être déterminés par des essais de fluage. Le calcul de la déformation lors d'un essai à contrainte variable (essai d'écroutissage, par exemple) est alors possible en considérant les 3 cas :

$$\begin{aligned} \underline{h} \geq k & \begin{cases} \dot{\varepsilon}^P_{(t)} = \varphi(\sigma_{(t)}) \frac{\underline{h}}{k} \\ \dot{\underline{h}}(t) = \dot{\sigma}_{(t)} - \alpha(\underline{h} - k) \end{cases} \\ 0 < \underline{h} < k & \begin{cases} \dot{\varepsilon}^P_{(t)} = \varphi(\sigma_{(t)}) \frac{\underline{h}}{k} \\ \dot{\underline{h}}(t) = \dot{\sigma}_{(t)} \end{cases} \\ \underline{h} = 0, \dot{\sigma}_{(t)} > 0 & \begin{cases} \dot{\varepsilon}^P_{(t)} = 0 \\ \dot{\underline{h}}(t) = \dot{\sigma}_{(t)} \end{cases} \\ \underline{h} < 0 & \begin{cases} \dot{\varepsilon}^P_{(t)} = 0 \\ \dot{\underline{h}}(t) = \dot{\sigma}_{(t)} \end{cases} \\ \underline{h} = 0, \dot{\sigma}_{(t)} < 0 & \begin{cases} \dot{\varepsilon}^P_{(t)} = 0 \\ \dot{\underline{h}}(t) = \dot{\sigma}_{(t)} \end{cases} \end{aligned}$$

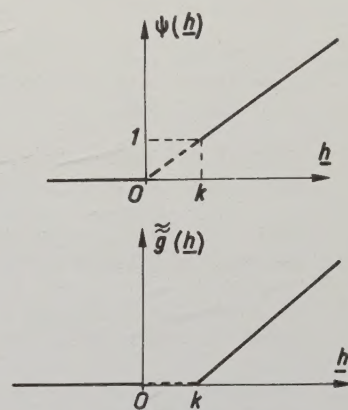


Fig. 55

$\underline{h}$ représentant ici la distance de σ au sommet de la surface limite $S(t)$, et non la distance de σ à l'ensemble $\bar{D}(t)$, les formules du cas intermédiaire étant obtenues par interpolation des formules des cas extrêmes, (fig. 55).

Manuscrit remis le 30 décembre 1969.

RÉFÉRENCES

- [1] et [2] - BUI HUY DUONG.- Ecroutissage des métaux. C.R. Ac. Sc. de Paris - t.259, (1964), p. 4 509-4 512, et t. 262, (1966), p. 401-404.
- [3] - PRAGER W.- The theory of plasticity. A survey of recent achievements. (James Clayton Lecture). Proc. Inst. Mech. Eng., n° 169, (1955), p. 41.
- [4] - KADASHEVITCH Yu. I., NOVOZHILOV B.V.- The theory of plasticity taking residual micro-stresses into consideration, Prikl. Mat. Mekh., vol. 22, n° 1, (1955), p. 78-89.
- [5] - OLSZAK W., MROZ Z. and PERZYNA P.- Recent trends in the development of the theory of plasticity, Pergamon Press, (1960), p. 15.

- [6] - MISES R. V.- Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. Z.A.M.M., vol. 8, n° 3, (1928), p. 161-165.
- [7] - KOITER W.T.- Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. Quarterly of applied Mathematics, vol. 11, n° 3, (1953), p. 350-354.
- [8] - BATDORF S.B. and BUDIANSKY B.- A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. N.A.C.A., T.N., n° 1 971, (April 1949).
- [9] - LIN T.H.- A proposed theory of plasticity based on slip. Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. Ann. Arbor, (Mich. 1954), ed. P.M. Noghdí, ASMA, (New-York 1955), p. 461-468.
- [10] - OLSZAK W., MROZ Z. and PERZYNA P.- Recent trends in the development of the theory of plasticity, Pergamon Press, (1960), p. 20-22.
- [11] - DRUCKER D.C.- Some implications of work-hardening and ideal plasticity. Quart. Appl. Mech., vol. 7, n° 2, (1949), p. 411-418.
- [12] - DRUCKER D.C.- A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. 1st U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. (Chicago 1951), ed. E. Sternberg, Ann. Arbor, (Mich. 1952), Edwards Brothers Inc., p. 487-491.
- [13] - BERTSCH P.K. and FINDLEY W.N.- An experimental study of the subsequent yield-surface corners, normality, Bauschinger and allied effects. Proc. of the 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., (1962), p. 893-9P7.
- [14] - BURTON Paul, WILLIAN CHEN and LI-CHIH LEE.- An experimental study of plastic flow under step-wise increments of torsion and tension. Proc. of the 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., (1962), p. 1 031-1 038.
- [15] - HODGE P.G.- General theory of piecewise linear plasticity based on maximum shear. J. Mech. Phys. Solids, vol. 5, (1957), p. 242-260.
- [16] - MAZET R.- Sur la représentation dynamique d'une structure lamellaire soumise à une charge qui provoque un fluage localisé. C.R. Ac. Sc., t. 256, (1963), p. 2 971.
- [17] - NAYROLES B.- Recherche d'une méthode d'étude des structures élasto-plastiques discrètes. Thèse 23 avril 1965, Fac. Sc. Paris.
- [18] - YOSHIMARU and YOSHIMURA.- Comment on the slip theory of Batdorf and Budiansky. Bulletin of J.S.M.E., vol. 1, n° 2, (1958), p. 109-113.
- [19] - HOFF N.J.- The analysis of structures. New-York, John Wiley and Co., Inc., London, Chapman and Hall limited, (1956).
- [20] - HILL R.- The mathematical theory of plasticity. Oxford, The Clarendon Press, (1950).
- [21] - JOHNSON Aldie E., Jr., and BATDORF S.B.- A study of slip formation in polycrystalline aluminium. N.A.C.A. Tech. Note 2 575, (December 1951).
- [22] - SZCZEPINSKI W.- On the effect of plastic deformation in the yield condition. Bull. Acad. Polo. Sc., série sc. tech., vol. XI, n° 12, p. 463-468.
- [23] - BRIDGMAN P.W.- Studies in large plastic flow and fracture. Mac Grow-Hill Book Company, (1952), p. 9.
- [24] - VALID R., LEMAITRE J. et BERGER H.- Un cas d'anisotropie en plasticité étudié sur une poutre en traction-torsion. Rech. Aérop. n° 121, (novembre-décembre 1967).
- [25] - THOMPSON N., COOGAN C.K. and RIDER J.G.- Experiments on aluminium crystals subjected to slowly alternating stresses. Journal Institute Metals, vol. 84, (1955-1956), p. 73-80.

